



Einführung in die Mathematische Statistik

8. Tutorium

Gesetze der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz

Im folgenden werden die Voraussetzungen und die Aussagen der genannten Sätze (2.78 bis 2.82) untersucht und anhand von Beispielen betrachtet.

Aufgabe 1 (Starkes und schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Zunächst soll der Unterschied zwischen dem starken und dem schwachen Gesetz der großen Zahlen herausgearbeitet werden:

Diese beiden Gesetze treffen Aussagen über die Konvergenz von $\bar{X}_{(n)}$ gegen $E(X)$ für eine Folge von unabhängigen, identisch wie X verteilten Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots . Notieren Sie die Ereignisse, auf welche sich die entsprechenden Aussagen beziehen, in ausführlicher Schreibweise und machen Sie sich hieran den Unterschied zwischen den beiden Gesetzen klar.

Bemerkung. Es läßt sich zeigen, daß aus der Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen für eine Folge von Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots bereits die Gültigkeit des schwachen Gesetzes der großen Zahlen für diese Folge von Zufallsvariablen folgt.

Aufgabe 2 (Beispiel einer Folge, die das starke Gesetz der großen Zahlen aber nicht den zentralen Grenzwertsatz erfüllt)

Gegeben sei eine Folge X_1, X_2, \dots von identisch verteilten und zentrierten Zufallsvariablen mit:

$$X_1 \text{ ist } N(0, 1)\text{-verteilt und } X_k = -X_{k-1} \text{ für } k \geq 2.$$

1. Zeigen Sie, daß diese Folge das starke Gesetz der großen Zahlen erfüllt. Betrachten Sie dazu die Menge $\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \cdot \sum_{k=1}^n X_k(\omega) = 0\}$.
2. Zeigen Sie nun, daß der zentrale Grenzwertsatz für diese Folge von Zufallsvariablen nicht erfüllt ist, d.h., es gilt nicht

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^n X_k \leq x \right) = \Phi(x).$$

Welche Voraussetzung des zentralen Grenzwertsatzes ist hier verletzt?

Aufgabe 3 (Beispiel einer Folge, die zwar den zentralen Grenzwertsatz, aber nicht das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt)

Gegeben sei eine Folge Y_1, Y_2, \dots von unabhängigen Zufallsvariablen mit:

Y_k ist $N(0, \sigma_k^2)$ -verteilt, wobei $\sigma_k^2 = 2k - 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie, daß diese Folge den zentralen Grenzwertsatz erfüllt.

Hinweis: $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$

2. Zeigen Sie nun, daß das schwache Gesetz der großen Zahlen für diese Folge von Zufallsvariablen nicht erfüllt ist. Welche Voraussetzung ist hier verletzt?