



Einführung in die Mathematische Statistik

7. Tutorium

Im Zentrum dieses Tutoriums stehen die Tschebyscheff-Markoffschen Ungleichungen und weiterhin die Hoeffdingsche Ungleichung für binomialverteilte Zufallsvariablen.

Satz 1. (Tschebyscheff-Markoff Ungleichungen)

Sei X eine Zufallsvariable, $q > 0$ und $\alpha > 0$. Dann gilt

$$P(\{|X| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^q} \cdot E|X|^q.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen lassen sich unter anderem Wahrscheinlichkeiten für große Abweichungen vom Erwartungswert abschätzen.

Ist X aber beispielsweise binomialverteilt, liefert die Hoeffdingsche Ungleichung im allgemeinen bessere Abschätzungen für solche Wahrscheinlichkeiten.

Satz 2. (Hoeffdingsche Ungleichung) Sei X binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in]0, 1[$. Dann gilt

$$P(\{|X - E(X)| \geq \alpha\}) \leq 2 \cdot \exp(-2 \cdot \alpha^2/n).$$

für alle $\alpha > 0$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 1.

Aufgabe 2. Sei Y eine $B(1000, 0.5)$ -verteilte Zufallsvariable. Wenden Sie Satz 1 mit $q = 2$ an, um eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{|Y - E(Y)| \geq 50\})$$

zu finden.

Für den Beweis von Satz 2 ist folgendes Lemma nützlich, das Sie im weiteren ohne Beweis verwenden können.

Lemma 1. Sei $r \geq 0$, $p \in]0, 1[$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$(1 - p + p \exp(r))^n \leq \exp(rnp + nr^2/8).$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie Satz 2. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (1) Leiten Sie mit Hilfe von Satz 1 zuerst eine von $r \geq 0$ abhängige Abschätzung für $P(\{X - E(X) \geq \alpha\})$ her.
- (2) Verwenden Sie danach Lemma 1 und minimieren Sie den erhaltenen Ausdruck über $r \geq 0$.

Aufgabe 4. Wenden Sie nun Satz 1 an, um eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{|Y - E(Y)| \geq 50\})$$

aus Aufgabe 2 zu finden. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 2.