Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 31.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

6. Tutorium

Aufgabe 1 (Normalverteilte Zufallsvariablen)
Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien unabhängig und normalverteilt. Es gelte

$$E(X_1) = 1, \quad Var(X_1) = 4, \quad E(X_2) = -1, \quad Var(X_2) = 16.$$

Die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 seien durch

$$Y_1 = X_1 + X_2 \qquad \text{und} \qquad Y_2 = X_1 - a \cdot X_2 - (1 + a)$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(-1 \leq Y_1 \leq 2)$.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|Y_1| \leq 3)$.
3. Berechnen Sie die Kovarianz von Y_1 und Y_2.
4. Bestimmen Sie die Zahl a so, daß Y_1 und Y_2 unkorreliert sind.
5. Arbeiten Sie mit dem in d) ermittelten Wert von a weiter und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|Y_1 + Y_2| > 5)$.

Aufgabe 2 (Normalverteilte Zufallsvariablen)
Der zufällige, räumliche Aufenthalt einer Amsel in einem bestimmten Zeitpunkt werde durch die Koordinaten (X_1, Y_1, Z_1) (in Metern) beschrieben, wobei X_1, Y_1, Z_1 unabhängig identisch $N(0, 49)$-verteilte Zufallsvariablen darstellen. Da sich in dem in $(0, 0, 0)$ gebauten Nest drei Eier befinden, hält sich auch eine Elster in dessen Umfeld auf. Ihre Koordinaten werden durch unabhängig identisch $N(0, 120)$-verteilte Zufallsvariablen X_2, Y_2, Z_2 beschrieben. Wir treffen die zusätzliche Annahme, daß sich die beiden Vögel unabhängig voneinander bewegen. Die Amsel verteidigt ihr Nest mit großer Aufmerksamkeit und bemerkt von ihrem jeweiligen Standpunkt aus in einem Umfeld von 9,90 Metern alles, was sich bewegt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zu einem bestimmten Zeitpunkt die Elster von der Amsel wegen der zu großen Entfernung nicht entdeckt wird.

Aufgabe 3 (Cauchy-Verteilung)
Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Verteilung von X heißt Cauchy-Verteilung.

Zeigen Sie:

(1) f ist eine Dichte.

(2) Der Erwartungswert von X existiert nicht.

(3) Die Zufallsvariable $Y = \arctan(X)$ ist $R([-\pi/2, \pi/2])$-verteilt.