Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 24.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

5. Tutorium

Aufgabe 1 (Identisch verteilte Zufallsvariablen)
Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen. Die Zufallsvariablen X und Y heißen *identisch verteilt*, wenn sie die gleiche Verteilungsfunktion besitzen. Die jeweiligen Verteilungsfunktionen seien mit F_X bzw. F_Y bezeichnet. Wir betrachten folgende Aussagen:

(i) X und Y sind identisch verteilt.
(ii) $X = Y$
(iii) $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)$
(iv) $\forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) = F_Y(t)$
(v) $\forall t \in \mathbb{R} : P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq t\})$
(vi) $E(X) = E(Y)$ und $Var(X) = Var(Y)$

Welche Implikationen gelten zwischen den oben aufgeführten Aussagen? Tragen Sie in die leeren Kästchen jeweils eines der logischen Zeichen „$\Longleftarrow$“, „$\Longrightarrow$“oder „$\Longleftrightarrow$“ ein, falls die entsprechende Implikation wahr ist. Geben Sie für fehlende Implikationen Gegenbeispiele an.
Für die Aussagen gilt:

$$\text{(vi)} \ \boxed{} \ \text{(ii)} \ \boxed{} \ \text{(iii)} \ \boxed{} \ \text{(i)} \boxed{} \ \text{(iv)} \ \boxed{} \ \text{(v)} \boxed{} \ \text{(vi)}$$

Aufgabe 2 (Diskrete mehrdimensionale Zufallsvariablen)
Wir betrachten zweidimensionale Zufallsvariablen (T_1, T_2), bei denen T_1 und T_2 identisch $B(1, \frac{1}{2})$-verteilt sind.

1. Bestimmen Sie alle möglichen Verteilungen von solchen Zufallsvariablen (T_1, T_2).
2. Bestimmen Sie zu den Lösungen in a) die zugehörigen Verteilungsfunktionen.
3. Berechnen Sie jeweils den Korrelationskoeffizienten $\rho(T_1, T_2)$.
4. Bei welchen dieser Verteilungen sind T_1 und T_2 unabhängig? Wo ist ein linearer Zusammenhang zwischen T_1 und T_2 festzustellen, d.h. bei welchen Verteilungen gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $P(T_2 = aT_1 + b) = 1$?

Aufgabe 3 (Stetige mehrdimensionale Zufallsvariablen)
Wir betrachten eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) mit Dichte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(s,t) = \begin{cases} se^{-st} & \text{falls } s \geq 0 \text{ und } t \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie $P(0 \leq X \leq 1, 2 \leq Y \leq 3)$.
2. Y ist stetig verteilt (Begründung?). Berechnen Sie eine Dichte von Y.
   Hinweis zum Integrieren: $\int ze^{-az}\,dz = \left(-\frac{1}{a}z - \frac{1}{a^2}\right)e^{-az} + c$, falls $a \neq 0$.
3. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F von (X, Y).
4. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y von X bzw. Y. Nach welcher bekannten Verteilung ist X verteilt?
5. Sind X und Y unabhängig?