Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 17.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

4. Tutorium - Lösungsvorschlag

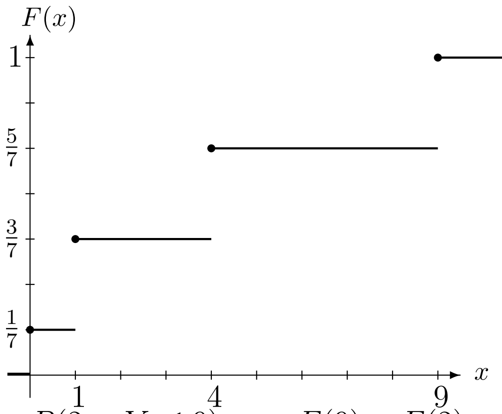
Aufgabe 1 (Darstellung der Verteilung diskreter Zufallsvariablen)

1.

i	0	1	4	9
$P(Y=i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$

2. $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot P(Y=i) = \frac{28}{7} = 4$
   $Var(Y) = \sum_{i=1}^{4} (i - E(Y))^2 \cdot P(Y=i) = \frac{84}{7} = 12$

3. Verteilungsfunktion von Y: $F(x) = P(Y \leq x) = \sum\limits_{i \leq x} P(Y=i) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{7} & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{7} & \text{für} \quad 1 \leq x < 4 \\ \frac{5}{7} & \text{für} \quad 4 \leq x < 9 \\ 1 & \text{für} \quad 9 \leq x \end{cases}$

4. 

$$P(2 < Y \leq 9) = F(9) - F(2) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} = P(Y=9) + P(Y=4)$$
$$P(2 \leq Y < 9) = F(9^-) - F(2^-) = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7} = P(Y=4)$$

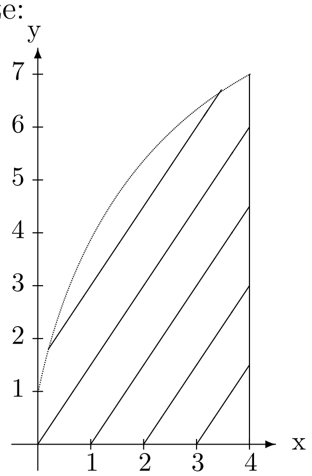
5. Wegen der Unabhängigkeit der $X_i, i = 1, \ldots, 10$, sind auch die $Y_i, i = 1, \ldots, 10$, unabhängig. Darüber hinaus sind $Y_1, \ldots, Y_{10}$ identisch verteilt wie Y. Definiert man die Zufallsvariable Z_i durch
$$Z_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } Y_i < 2 \\ 0 & \text{falls } Y_i \geq 2 \end{cases},$$
so beschreibt die Summe $Z_1 + \ldots + Z_{10}$ der voneinander unabhängigen Z_i die Anzahl der Drehversuche, bei denen das „Endergebnis" kleiner als 2 ist. Bezeichnet man mit $p := P(Z_1 = 1)$ die Wahrscheinlichkeit für einen „Erfolg" im 1. Versuch (d.h. $\{Y_1 < 2\}$), so gilt wegen der identischen Verteilung der Y_i und damit auch der Z_i:
$$P(Z_i = 1) = P(Y_i < 2) = P(Y_i = 0) + P(Y_i = 1) = \frac{3}{7} = p \quad \forall i = 1, \ldots, 10.$$

Aus all diesen Überlegungen ergibt sich, daß die Zufallsvariable $Z_1+\ldots+Z_{10}$ binomialverteilt ist mit den Parametern $n = 10$ und $p = \frac{3}{7}$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich daher:

$$\begin{aligned}
P(Z_1+\ldots+Z_{10} \geq 4) &= 1 - P(Z_1+\ldots+Z_{10} \leq 3) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \left(\frac{3}{7}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^{10-k} \\
&= 1 - \left[\left(\frac{4}{7}\right)^{10} + \binom{10}{1} \frac{3}{7} \left(\frac{4}{7}\right)^9 \right. \\
&\quad \left. + \binom{10}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^8 + \binom{10}{3} \left(\frac{3}{7}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^7 \right] \\
&= 0.6866
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Bestimmte Integration)

1. Skizze:



Eine Stammfunktion von $3\sqrt{x}+1$ ist gegeben durch $2\sqrt{x^3}+x$, da

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{x^3}+x)' &= (2x^{3/2}+x)' \\
&= 3x^{1/2}+1 \quad .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_0^4 (3\sqrt{x}+1)\,dx &= \left[2\sqrt{x^3}+x\right]_0^4 \\
&= 16+4-(0+0) \\
&= 20 \quad .
\end{aligned}$$

2. Eine Stammfunktion von $\cos t$ ist $\sin t$ und damit

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos t\,dt = [\sin t]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -1-1 = -2 \quad .$$

3. Eine Stammfunktion von $\frac{3}{x^3}$ ist $-\frac{3}{2}x^{-2}$, da

$$(-\frac{3}{2}x^{-2})' = 3x^{-3} \quad .$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{3}{x^3}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{3}{x^3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{3}{2}x^{-2}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (-\frac{3}{2b^2} - (-\frac{3}{2})) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Darstellung der Verteilung stetiger Zufallsvariablen)

1. Die Verteilungsfunktion von X lautet:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

   Es gilt $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\frac{1}{X} \leq y)$. Da X nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt, ist $P(\frac{1}{X} \leq y) = 0$ für $y \leq 1$. Für $y > 1$ gilt:

$$P(\frac{1}{X} \leq y) = P(X \geq \frac{1}{y}) = 1 - P(X < \frac{1}{y}) = 1 - F_X(\frac{1}{y}) = 1 - \frac{1}{y}.$$

   Damit lautet die Verteilungsfunktion von Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{y} & \text{für } y > 1. \end{cases}$$

2. Aus $f(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$ an Stetigkeitsstellen y erhält man die Dichte

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 1 \\ \frac{1}{y^2} & \text{für } y > 1. \end{cases}$$

3. Da das Integral

$$\int_1^\infty y f(y) dy = \int_1^\infty \frac{1}{y} dy$$

   nicht existiert, existieren weder Erwartungswert noch Varianz von Y.

4. Der Median $y_{0.5}$ muß die Bedingung $P(Y \leq y_{0.5}) = 0.5$ erfüllen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F_Y(y_{0.5}) &= 0.5 \\ 1 - \frac{1}{y_{0.5}} &= 0.5 \\ 0.5 &= \frac{1}{y_{0.5}} \\ y_{0.5} &= 2. \end{aligned}$$

5. $P(2 < Y \leq 9) = \int_2^9 f(y) dy = \int_2^9 \frac{1}{y^2} dy = \Big[-\frac{1}{y}\Big]_2^9 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}$.

6. Für die gefragten Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\begin{aligned} P(2 < Y \leq 9) &= F(9) - F(2) = 1 - \frac{1}{9} - (1 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{18} \\ P(2 \leq Y < 9) &= F(9^-) - F(2^-) = 1 - \frac{1}{9} - (1 - \frac{1}{2}) = \frac{7}{18} \\ P(Y = 9) &= F(9) - F(9^-) = 0 \end{aligned}$$