Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006 10.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

3. Tutorium - Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit)

Beim einfachen Münzwurf kann man $\Omega = \{1, 2\}$ wählen, wobei 1 Wappen und 2 Zahl entspreche. Als σ–Algebra $\mathfrak{A}$ bietet sich die Potenzmenge von Ω an. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P sei durch die Laplace–Annahme definiert, d.h.

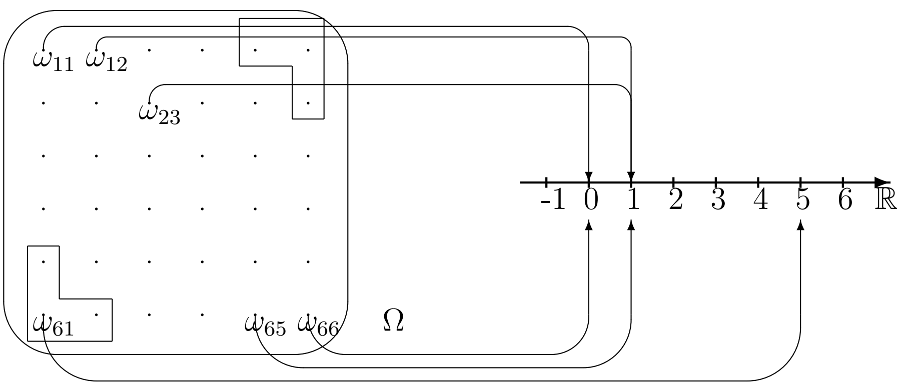
$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} \quad C \in \mathfrak{A} \quad .$$

1. FALSCH. Gegenbeispiel: Für $A = B = \{1\}$ ergibt sich
$$P(A|B) + P(A^C|B) = 1 + 0 \neq \frac{1}{2} = P(B) \quad .$$
Die Behauptung ist richtig für $P(B) = 1$ (siehe b)).
2. RICHTIG:
$$\begin{aligned} P(A|B) + P(A^C|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup (A^C \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P((A \cup A^C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad . \end{aligned}$$
Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen $(A \cap B) \cap (A^C \cap B) = \emptyset$.
3. FALSCH. Gegenbeispiel: Für $A = B = \{1\}$ ergibt sich
$$P(A|B) + P(A|B^C) = 1 + 0 \neq \frac{1}{2} = P(A) \quad .$$
4. FALSCH. Gegenbeispiel: Für $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1\}$ ergibt sich:
$$P(A|B) + P(A|B^C) = 1 + 1 \neq 1 \quad .$$
5. RICHTIG:
$$\begin{aligned} P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = P(A \cup B|C) \end{aligned}$$
Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen Satz 2.4 (v).

6. FALSCH. Aus $A \cap B = \emptyset$ kann wegen $P(\emptyset) = 0$ nur dann Unabhängigkeit (also $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$) folgen, wenn $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$ gilt.
   Gegenbeispiel: Für $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$ ergibt sich:
   $$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0 = P(A \cap B) \quad .$$
   $A \cap B = \emptyset$ bedeutet: „A und B sind unvereinbar.“
7. FALSCH. Gegenbeispiel: siehe f). $A \neq B$ bedeutet: „A und B sind verschieden.“
8. RICHTIG:
   A, B unabhängig $\Rightarrow P(A|B) = P(A)$:
   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \quad .$$
   A, B unabhängig $\Leftarrow P(A|B) = P(A)$:
   $$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \quad .$$
9. nur RICHTIG, wenn P durch die Laplace–Annahme definiert ist, da dann wg. h) gilt:
   $$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = P(A|B) = P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad .$$

Aufgabe 2 (Zufallsvariablen)

1. Z: Augenzahl des schwarzen Würfels
   S: Summe der Augenzahlen
   X: Betrag der Differenz der Augenzahlen der beiden Würfel
2. $Q : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Q(\omega_{ij}) = 14 - i - j$
   $T : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $T(\omega_{ij}) = \max\{i, j\}$
3. $\{X \geq 4\} = \{\omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{26}, \omega_{51}, \omega_{61}, \omega_{62}\}$
   $$P(\{X \geq 4\}) = \frac{|\{X \geq 4\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
4.



Die sechs eckig umrandeten Punkte stellen die Menge $\{X \geq 4\}$ dar.

5. (i) Eine Zufallsvariable X ordnet nicht jedem Ereignis $A \in \mathfrak{A}$, sondern jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl zu.
(ii) Der Wertebereich einer Zufallsvariablen X muß nicht auf $[0, 1]$ beschränkt sein, sondern ganz $\mathbb{R}$ ist zugelassen.

Aufgabe 3 (Verteilungsfunktionen)
Zu überprüfen sind die Eigenschaften des Satzes 2.25.

A Nein. (iii) ist verletzt.

B Ja. (i) -(iii) sind erfüllt

C Nein. (i) ist verletzt.

C Ja. (i) -(iii) sind erfüllt.