Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 03.05.2006

Einführung in die Mathematische Statistik

2. Tutorium

Aufgabe 1 (Wahrscheinlichkeiten unter der Laplace–Annahme)
Es sei Ω eine (nichtleere) endliche Menge und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω.

1. Welche der folgenden Aussagen ergeben keinen Sinn, wenn A ein Ereignis bezeichnen soll?
   (i) $A \in \Omega$ (ii) $A \subseteq \Omega$ (iii) $A \in \mathfrak{A}$ (iv) $A \subseteq \mathfrak{A}$
   (v) $A = \{\omega\}$ für ein $\omega \in \Omega$ (vi) $A = \omega$ für ein $\omega \in \Omega$
2. Die Laplace–Annahme sei erfüllt, A und B seien Ereignisse. Welche Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch
   $$\frac{|A|}{|\Omega|}, \ \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}, \ \frac{|\Omega| - |B|}{|\Omega|}, \ \frac{1}{|\Omega|} \quad ?$$
   Wieso ist $\frac{|A|}{|B|}$ im allgemeinen keine Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 2 (Modellierung eines Zufallsexperiments durch einen Wahrscheinlichkeitsraum)
Aus einem Skatblatt (32 Karten, davon 4 Asse) werden nacheinander zwei Karten gezogen, ohne daß die erste Karte wieder zurückgesteckt wird. (Einen solchen Vorgang bezeichnet man als „Ziehen ohne Zurücklegen“). Im folgenden ist die Wahrscheinlichkeit von Interesse, im zweiten Zug ein As zu ziehen.

1. Eine Möglichkeit zur Modellierung dieses Zufallsexperiments besteht darin, als Ergebnismenge $\tilde{\Omega} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ zu wählen, wobei „As“ durch 1 und „kein As“ durch 0 kodiert wird. Stellen Sie die Ereignisse „As im zweiten Zug“ und „As im ersten Zug“ als Teilmengen von $\tilde{\Omega}$ dar und geben Sie eine möglichst kleine σ–Algebra $\tilde{\mathfrak{A}}$ über $\tilde{\Omega}$ an, welche diese beiden Ereignisse enthält.
   Dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ liege die Laplace–Annahme zugrunde. Berechnen Sie $\tilde{P}$(„As im zweiten Zug“). Was sagen Sie zu Ihrem Resultat?
2. Warum ist der Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{P})$ nicht geeignet zur Modellierung des obigen Experiments? Finden Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, und berechnen Sie daraufhin P(„As im zweiten Zug“).

Aufgabe 3 (Kombinatorische Grundbegriffe)
In dieser Aufgabe soll anhand von Beispielen auf einige kombinatorische Grundbegriffe eingegangen werden. Dazu werden drei verschiedene Situationen betrachtet:

Situation A: Die Nummer eines einfachen Zahlenschlosses besteht aus drei (nicht notwendig verschiedenen) Ziffern zwischen 1 und 9.

Situation B: Bei einem Pferderennen nehmen neun Pferde teil, die die Startnummern 1 bis 9 tragen. Bei der sogenannten Dreierwette soll die Reihenfolge des Zieleinlaufs der ersten drei Pferde richtig getippt werden.

Situation C: Bei einer kleinen Lotterie werden drei von neun Kugeln gezogen. Die Kugeln tragen die Nummern 1 bis 9. Auf dem Lottoschein dürfen genau drei der neun Zahlen angekreuzt werden.

Man interessiert sich also etwa für

A: die möglichen Nummern des Schlosses,

B: die möglichen Zieleinläufe der ersten drei Pferde,

C: die möglichen Ergebnisse der Lottoziehung

sowie jeweils die Anzahl dieser Möglichkeiten. In allen drei Fällen handelt es sich um Proben vom Umfang 3 aus der Menge $M = \{1, \ldots, p\}$.

1. Entscheiden Sie, bei welcher Situation es sich um geordnete oder ungeordnete Proben mit bzw. ohne Wiederholung handelt. Ordnen Sie danach den Situationen je eine der Mengen

$$\{\{x_1, x_2, x_3\} : x_i \in M \text{ für } i = 1, 2, 3 \text{ und } x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$$
$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in M \text{ für } i = 1, 2, 3\}$$
$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in M \text{ für } i = 1, 2, 3 \text{ und } x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$$

   zur mathematischen Beschreibung aller Möglichkeiten zu.

2. Berechnen Sie für alle drei Situationen die Anzahl aller Möglichkeiten. Welche Formel benutzen Sie jeweils?

3. Machen Sie sich anhand der Beispiele und Ihrer Ergebnisse aus a) den Unterschied zwischen einem k-Tupel und einer k-elementigen Menge klar. Testen Sie daraufhin Ihr Verständnis, indem Sie folgende Aussagen auf ihre Richtigkeit überprüfen:

$\{0, 2, 5, 6\} = \{6, 5, 2, 0\}$	☐ falsch	☐ richtig
$(0, 2, 5, 6) = (6, 5, 2, 0)$	☐ falsch	☐ richtig
$\{8, 7, 7, 0\} = \{8, 7, 0\}$	☐ falsch	☐ richtig
$(8, 7, 7, 0) = (8, 7, 0)$	☐ falsch	☐ richtig