Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
B. Niese

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19./20. Juli 2006

Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 7

Gruppenübung

G 19 Der Alkoholspiegel von 12 Blutproben wurde jeweils mit zwei verschiedenen Verfahren gemessen. Dabei erhielt man folgende Promillewerte:

Blutspiegel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Verfahren A	0.65	0.48	0.93	0.87	1.12	0.58	0.74	0.62	1.04	0.36	0.72	0.51
Verfahren B	0.60	0.31	1.06	0.75	1.15	0.59	0.82	0.60	1.13	0.50	0.68	0.58

Überprüfen Sie die Hypothese, dass die Verfahren als gleichwertig angesehen werden können mit einem geeigneten nichtparametrischen Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$. Warum ist der Zweistichprobentest von Wilcoxon-Mann-Whitney hier nicht geeignet?

G 20 Wilcoxon-Mann-Whitney-Test, Run-Test

Von 20 Schülern wurden 10 ausgelost. Sie erhielten während des ganzen Winters eine Multivitamintablette pro Tag. Die übrigen 10 erhielten täglich eine Placebotablette. Gezählt wurden die Tage der Abwesenheit vom Unterricht mit dem Ergebnis

Versuchsgruppe	0	1	2	4	7	10	15	17	19	26
Kontrollgruppe	3	8	16	18	20	22	23	25	27	28

Es wird angenommen, dass die angegebenen Messwerte $x_1, \ldots, x_{10}, y_1, \ldots, y_{10}$ eine Realisierung unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{10}, Y_1, \ldots, Y_{10}$ sind und dass $X_1, \ldots, X_{10}$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_{10}$ jeweils die gleiche Verteilungsfunktion F bzw. G besitzen. Prüfen Sie die Hypothese $H_0 : F = G$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ mit dem

a) Zweistichprobentest von Wilcoxon-Mann-Whitney,

b) Run-Test von Wald und Wolfowitz.

Die zur Bestimmung des kritischen Bereichs jeweils benötigten Quantile sollten Sie näherungsweise mit Hilfe von Normalverteilungsquantilen bestimmen.

G 21 Drei Landwirte besitzen je 4 ungefähr gleichalte Schweine einer bestimmten Züchtung. Jeder der drei Landwirte benutzt eine andere Mästmethode. Über einen gewissen Zeitraum hinweg wurden nun die Gewichtszunahmen [in kg] bei allen 12

Schweinen festgestellt. Es kann angenommen werden, dass es sich hierbei um eine Realisierung von unabhängigen Zufallsvariablen X_i, Y_i, Z_i, $i = 1, 2, 3, 4$ handelt. Dabei besitzen für $i = 1, 2, 3, 4$ die Zufallsvariablen X_i ebenso wie die Zufallsvariablen Y_i und Z_i jeweils identische Verteilungen. Prüfen Sie mit dem Kruskal-Wallis-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$, ob die Hypothese, dass alle drei Mästmethoden gleichwertig sind, verworfen werden muss.

Messreihe	Gewichtszunahme			
x_i	4	11	12	13
y_i	10	14	17	19
z_i	16	18	20	26

G 22 Drei Ziegelsteinsorten sollen auf ihre Belastbarkeit überprüft werden. Es ergaben sich folgende Ergebnisse sowie die arithmetischen Mittel $\bar{x}_i$ und die empirischen Varianzen s_i^2 $(i = 1, 2, 3)$:

Sorte i	n_i	Resultate x_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n_i)$											$\bar{x}_i$	s_i^2
1	11	7.1	6.9	7.2	7.0	6.9	6.8	7.0	7.3	7.1	6.7	7.0	7.0	0.03
2	7	7.0	7.2	7.1	6.9	7.3	7.0	7.2					7.1	0.02
3	10	6.9	7.2	6.6	7.0	6.8	6.9	7.1	6.7	6.8	7.0		6.9	0.033

Es wird angenommen, dass die Messwerte $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ für die Sorte i als Realisierungen von $N(\mu_i, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ angesehen werden können $(i = 1, 2, 3)$. Alle Zufallsvariablen werden als unabhängig vorausgesetzt.
Testen Sie mit einem geeigneten Verfahren zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

Hinweis: $(n_i - 1) \cdot s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$
$F_{2,25;0.95} = 3.3852$

Einführung in die Mathematische Statistik
Übung 7, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 19 Der Alkoholspiegel von 12 Blutproben wurde jeweils mit zwei verschiedenen Verfahren gemessen. Dabei erhielt man folgende Promillewerte:

Blutspiegel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Verfahren A	0.65	0.48	0.93	0.87	1.12	0.58	0.74	0.62	1.04	0.36	0.72	0.51
Verfahren B	0.60	0.31	1.06	0.75	1.15	0.59	0.82	0.60	1.13	0.50	0.68	0.58

Überprüfen Sie die Hypothese, dass die Verfahren als gleichwertig angesehen werden können mit einem geeigneten nichtparametrischen Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$. Warum ist der Zweistichprobentest von Wilcoxon-Mann-Whitney hier nicht geeignet?

G 20 Wilcoxon-Mann-Whitney-Test, Run-Test

Von 20 Schülern wurden 10 ausgelost. Sie erhielten während des ganzen Winters eine Multivitamintablette pro Tag. Die übrigen 10 erhielten täglich eine Placebotablette. Gezählt wurden die Tage der Abwesenheit vom Unterricht mit dem Ergebnis

Versuchsgruppe	0	1	2	4	7	10	15	17	19	26
Kontrollgruppe	3	8	16	18	20	22	23	25	27	28

Es wird angenommen, dass die angegebenen Messwerte $x_1, \ldots, x_{10}, y_1, \ldots, y_{10}$ eine Realisierung unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{10}, Y_1, \ldots, Y_{10}$ sind und dass $X_1, \ldots, X_{10}$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_{10}$ jeweils die gleiche Verteilungsfunktion F bzw. G besitzen. Prüfen Sie die Hypothese $H_0 : F = G$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ mit dem

a) Zweistichprobentest von Wilcoxon-Mann-Whitney,

b) Run-Test von Wald und Wolfowitz.

Die zur Bestimmung des kritischen Bereichs jeweils benötigten Quantile sollten Sie näherungsweise mit Hilfe von Normalverteilungsquantilen bestimmen.

G 21 Drei Landwirte besitzen je 4 ungefähr gleichalte Schweine einer bestimmten Züchtung. Jeder der drei Landwirte benutzt eine andere Mästmethode. Über einen gewissen Zeitraum hinweg wurden nun die Gewichtszunahmen [in kg] bei allen 12 Schweinen festgestellt. Es kann angenommen werden, dass es sich hierbei um eine Realisierung von unabhängigen Zufallsvariablen X_i, Y_i, Z_i, $i = 1, 2, 3, 4$ handelt. Dabei besitzen für $i = 1, 2, 3, 4$ die Zufallsvariablen X_i ebenso wie die Zufallsvariablen Y_i und Z_i jeweils identische Verteilungen. Prüfen Sie mit dem Kruskal-Wallis-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$, ob die Hypothese, dass alle drei Mästmethoden gleichwertig sind, verworfen werden muss.

Messreihe	Gewichtszunahme			
x_i	4	11	12	13
y_i	10	14	17	19
z_i	16	18	20	26

G 22 Drei Ziegelsteinsorten sollen auf ihre Belastbarkeit überprüft werden. Es ergaben sich folgende Ergebnisse sowie die arithmetischen Mittel $\bar{x_i}$ und die empirischen Varianzen s_i^2 $(i = 1, 2, 3)$:

Sorte i	n_i	Resultate x_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n_i)$											$\bar{x_i}$	s_i^2
1	11	7.1	6.9	7.2	7.0	6.9	6.8	7.0	7.3	7.1	6.7	7.0	7.0	0.03
2	7	7.0	7.2	7.1	6.9	7.3	7.0	7.2					7.1	0.02
3	10	6.9	7.2	6.6	7.0	6.8	6.9	7.1	6.7	6.8	7.0		6.9	0.033

Es wird angenommen, dass die Messwerte $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ für die Sorte i als Realisierungen von $N(\mu_i, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$ angesehen werden können $(i = 1, 2, 3)$. Alle Zufallsvariablen werden als unabhängig vorausgesetzt.
Testen Sie mit einem geeigneten Verfahren zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

Hinweis: $(n_i - 1) \cdot s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x_i})^2$
$F_{2,25;0.95} = 3.3852$