Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
B. Niese

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.07./06.07.2006

Einführung in die Mathematische Statistik für WInf, LaB, CE Übung 6

Wir wünschen allen Teilnehmern viel Erfolg bei der Semestralklausur!
Die Einsicht in die Klausuren erfolgt in den Übungen am 19./20.07.06.

Gruppenübung

G 16 In einem Betrieb werden Muttern hergestellt, deren Durchmesser (in mm) sich durch unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschreiben lassen. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 26$ ergab sich $\overline{x} = 63.2$ und $s^2 = 0.04$.

a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese $H_0 : \mu = 63$.

b) Geben Sie alle $\mu_0 \in \mathbb{R}$ an, für die die Nullhypothese mit obigen Daten bei Verwendung des Tests aus Aufgabenteil a) zum Niveau $\alpha = 0.05$ nicht verworfen wird.

c) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten ein konkretes Schätzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$ und vergleichen Sie mit Ihrem Resultat aus b).

d) Überprüfen Sie außerdem zum Niveau $\alpha = 0.1$ die Nullhypothese $H_0 : \sigma^2 \leq 0.03$.

Fazit aus b) und c):
Ist $I = I(x_1, \ldots, x_{26})$ das konkrete Schätzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha$ aus Aufgabenteil c), so gilt: Die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ wird beim t-Test zum Niveau α genau dann verworfen, wenn $\mu_0 \notin I$ gilt.

G 17 Zwei Kletterseile wurden im Hinblick auf ihre Zugfestigkeit verglichen. Bei 15 Seilen der Sorte *Alpenglühen* erhielt man einen empirischen Mittelwert von $\overline{x} = 9.2$ und eine empirische Standardabweichung von $s_x = 3.8$, bei 17 Seilen der Marke *Berghexe* ergaben sich ein empirischer Mittelwert von $\overline{y} = 11.5$ und eine empirische Standardabweichung von $s_y = 5.1$. Die Messwerte $x_1, \ldots, x_{15}$ für die Sorte *Alpenglühen* können als Realisierungen von $N(\mu_A, \sigma_A^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{15}$ angesehen werden, die Messwerte $y_1, \ldots, y_{17}$ für die Marke *Berghexe* als Realisierungen von $N(\mu_B, \sigma_B^2)$-verteilten Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_{17}$. Weiter seien die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{15}, Y_1, \ldots, Y_{17}$ unabhängig.

a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.1$ die Nullhypothese $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$.

b) Nehmen Sie nun $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ an und überprüfen Sie unter dieser Annahme mit einem geeigneten Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese $H_0 : \mu_A = \mu_B$.

G 18 χ^2**-Anpassungstest**

Ein Taschenrechner liefert Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Es wurden nacheinander 1000 dieser Zahlen erzeugt. Nach Einteilung des Intervalls $[0,1]$ in 10 gleichgroße Teilintervalle wurde gezählt, wieviele der 1000 Zufallszahlen auf die einzelnen Klassen entfielen. Man erhielt folgende Tabelle:

Klasse	$[0,0.1]$	$(0.1,0.2]$	$(0.2,0.3]$	$(0.3,0.4]$	$(0.4,0.5]$
Anzahl	68	116	101	107	92
Klasse	$(0.5,0.6]$	$(0.6,0.7]$	$(0.7,0.8]$	$(0.8,0.9]$	$(0.9,1]$
Anzahl	100	136	101	79	100

Überprüfen Sie mit Hilfe eines χ^2-Anpassungstests zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob die Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_{1000}$ als Realisierungen von unabhängigen $R(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{1000}$ angesehen werden können.

Hausübung

H 31 Es wird angenommen, dass die vorliegende Messreihe $x_1, \ldots, x_{25}$ (s. Tabelle) eine Realisierung von 25 unabhängigen $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen ist.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	704	695	703	693	698	694	701	706	705	697	701	705	693
i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
x_i	702	686	696	703	693	712	706	693	702	699	693	695	

Für die Messreihe gilt $\sum_{i=1}^{25} x_i = 17475$ und $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 12\,215\,867$.

a) Überprüfen Sie die Hypothese $H_0 : \mu \geq 700$ gegen $H_1 : \mu < 700$ mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$.

b) Es sei nun vorausgesetzt, dass für obige Messwerte $\sigma^2 = 25$ bekannt ist. Überprüfen Sie nun mit einem anderen Test dieselbe Nullhypothese wie in Aufgabenteil a) zum Niveau $\alpha = 0.05$.

H 32 Gegeben sei die folgende Messreihe $x_1, \ldots, x_{16}$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0.534 & 0.545 & 0.283 & 0.445 & 0.519 & 0.513 & 0.464 & 0.499 \\ 0.605 & 0.526 & 0.568 & 0.427 & 0.546 & 0.527 & 0.566 & 0.597 \end{array}$$

mit $\sum_{i=1}^{16} x_i = 8.164$ und $\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 4.257386$.
Dabei wird angenommen, dass $x_1, \ldots, x_{16}$ Realisierungen von 16 unabhängigen, identisch $N(\mu, 0.01)$-verteilten Zufallsvariablen sind.

a) Überprüfen Sie die Hypothese $H_0 : \mu_0 = 0.5$ gegen die Alternative $H_1 : \mu \neq 0.5$ mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

b) Betrachten Sie nun die Hypothese $H_0 : \mu \geq 0.5$ gegen die Alternative $H_1 : \mu < 0.5$. Für welche Werte von μ wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art kleiner als 10 % auf gleichem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$?

H 33 OC- und Gütefunktion

Ein Hersteller von Computerchips möchte den Anteil θ von Ausschussstücken in der Produktion überprüfen lassen ($0 \leq \theta \leq 1$). Um die Hypothese $H_0 : \theta \leq 0.01$ zu überprüfen, wurde folgender Test vorgeschlagen: Man entnimmt der laufenden Produktion eine Stichprobe von 30 Chips. Falls darunter mehr als 1 Ausschussstück ist, wird H_0 verworfen.

a) Berechnen Sie die OC-Funktion und die Gütefunktion des Tests.

b) Zeigen Sie, dass der vorgeschlagene Test ein Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ist.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird H_0 nicht verworfen, wenn $\theta = 0.05$ gilt (Fehler 2. Art)?

H 34 Zwei Wirtschaftsinformatiker wollen ihren Internetauftritt vergleichen und ermitteln dazu die Verweildauern (in Sekunden) der Besucher auf den jeweiligen Websites. Es ergeben sich folgende Durchschnittswerte und Streuungen:

	Besucherzahl	durchschnittl. Verweildauer	Streuung
Internetauftritt A	$m = 17$	$\bar{x} = 321.2$	$s_x = 47.0$
Internetauftritt B	$n = 16$	$\bar{y} = 286.5$	$s_y = 45.3$

Gehen Sie davon aus, dass die ermittelten Verweildauern als Realisierung unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen angesehen werden können.

a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.1$, ob die Annahme gleicher Varianzen bei beiden Internetauftritten gerechtfertigt ist.

b) Testen Sie unter geeigneten Annahmen auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass beide Websites gleich lange besucht werden.

H 35 Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit folgender Dichte f:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - 2|t - \frac{1}{2}| & \text{für } 0 \leq t < 1\,, \\ 1 - 2|t - \frac{3}{2}| & \text{für } 1 \leq t \leq 2\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie diese Dichte.

b) Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P(0 \leq X < 0.5)$, $P(0.5 \leq X < 1)$, $P(1 \leq X < 1.5)$, $P(1.5 \leq X \leq 2)$.

c) Zur Überprüfung, ob sich ein bestimmtes Zufallsexperiment angemessen durch die Zufallsvariable X beschreiben lässt, wurden 500 unabhängige Experimente durchgeführt und folgende Daten beobachtet:

Klasse	[0;0.5)	[0.5;1)	[1;1.5)	[1.5;2]
Anzahl	95	135	140	130

Prüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob sich das Zufallsexperiment angemessen durch die obige Zufallsvariable beschreiben lässt.

H 36 Exakter Test von Fisher

Zum Test, ob ein Mittel gegen Schädlingsbefall tatsächlich hilft, wurden 25 gleichartige Topfpflanzen beobachtet, von denen 10 Pflanzen mit dem Mittel behandelt wurden. Nach Ablauf eines vorher festgelegten Zeitraums wurde das folgende Ergebnis ermittelt:

	behandelt	nicht behandelt
Befall	3	11
kein Befall	7	4

Überprüfen Sie mit Hilfe des exakten Tests von Fisher zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob Behandlung und Schädlingsbefall unabhängig sind.

Hinweis:
Für $p_i = \frac{\binom{10}{i}\binom{15}{14-i}}{\binom{25}{14}}$ ergibt sich auf 5 Dezimalstellen gerundet:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.00000	0.00024	0.00459	0.03675	0.14148	0.28296	0.30317	0.17324	0.05053