Einführung in die Mathematische Statistik
für WInf, LaB, CE
Übung 6, Lösungsvorschlag

Hausübung

H 31 Es wird angenommen, dass die vorliegende Messreihe $x_1, \ldots, x_{25}$ (s. Tabelle) eine Realisierung von 25 unabhängigen $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen ist.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	704	695	703	693	698	694	701	706	705	697	701	705	693
i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
x_i	702	686	696	703	693	712	706	693	702	699	693	695	

Für die Messreihe gilt $\sum_{i=1}^{25} x_i = 17475$ und $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 12\,215\,867$.

a) Überprüfen Sie die Hypothese $H_0 : \mu \geq 700$ gegen $H_1 : \mu < 700$ mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$.

geeigneter Test: t-Test mit $\alpha = 0.05$

- *Nullhypothese: $H_0 : \ \mu \geq 700$ vs. $H_1 : \mu < 700$ (einseitig)!*
- *Testgröße:*

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{(n)}}}$$

- *Realisierung der Testgröße:*

$$T(x_1, \ldots, x_{25}) \ = \ \sqrt{25} \cdot \frac{699 - 700}{\sqrt{35.0833}} \ \approx \ -0.8441$$

denn

$$\bar{x} \ = \ \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i \ = \ \frac{17475}{25} \ = \ 699$$

und

$$s^2 \ = \ \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 15 \cdot \bar{x}^2\right) \ = \ \frac{842}{24} \ \approx \ 35.0833$$

- *Kritischer Bereich:*

$$K = \{(x_1, \ldots, x_{25}) \mid T(x_1, \ldots, x_{25}) < t_{24;0.05}\}$$

- *Entscheidung: Wegen $-0.8441 \geq t_{24;0.05} = -1.7109$ wird H_0 nicht verworfen.*

b) Es sei nun vorausgesetzt, dass für obige Messwerte $\sigma^2 = 25$ bekannt ist. Überprüfen Sie nun mit einem anderen Test dieselbe Nullhypothese wie in Aufgabenteil a) zum Niveau $\alpha = 0.05$.

geeigneter Test: Gauß-Test mit $\alpha = 0.05$

- *Nullhypothese:* $H_0: \ \mu \geq 700$ *vs.* $H_1 : \mu < 700$ *(einseitig)!*
- *Testgröße:*
$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sigma_0}$$
- *Realisierung der Testgröße:*
$$T(x_1, \ldots, x_{25}) \ = \ \sqrt{25} \cdot \frac{699 - 700}{25} \ = \ -1$$
- *Kritischer Bereich:*
$$K = \{(x_1, \ldots, x_{25}) \mid T(x_1, \ldots, x_{25}) < u_{0.05}\}$$
- *Entscheidung: Wegen* $-1 \geq -1.645 = u_{0.05}$ *wird* H_0 *nicht verworfen.*

H 32 Gegeben sei die folgende Messreihe $x_1, \ldots, x_{16}$:

0.534	0.545	0.283	0.445	0.519	0.513	0.464	0.499
0.605	0.526	0.568	0.427	0.546	0.527	0.566	0.597

mit $\sum_{i=1}^{16} x_i = 8.164$ und $\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 4.257386$.
Dabei wird angenommen, dass $x_1, \ldots, x_{16}$ Realisierungen von 16 unabhängigen, identisch $N(\mu, 0.01)$-verteilten Zufallsvariablen sind.

a) Überprüfen Sie die Hypothese $H_0 : \mu_0 = 0.5$ gegen die Alternative $H_1 : \mu \neq 0.5$ mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

geeigneter Test: Gauß-Test mit $\alpha = 0.05$

- *Nullhypothese:* $H_0: \ \mu = 0.5$ *vs.* $H_1 : \mu \neq 0.5$
- *Testgröße:*
$$T(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sigma_0}$$
- *Realisierung der Testgröße:*
$$T(x_1, \ldots, x_{16}) \ = \ \frac{\sqrt{16}}{0.1} \cdot \left(\frac{8.164}{16} - 0.5\right) \ = \ 0.41$$
- *Kritischer Bereich:*
$$K = \{(x_1, \ldots, x_{16}) \ : \ |T(x_1, \ldots, x_{16})| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$
- *Entscheidung: Wegen* $|0.41| \leq 1.96 = u_{0.975}$ *wird* H_0 *nicht verworfen.*

b) Betrachten Sie nun die Hypothese $H_0 : \mu \geq 0.5$ gegen die Alternative $H_1 : \mu < 0.5$. Für welche Werte von μ wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art kleiner als 10 % auf gleichem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$?

geeigneter Test: Gauß-Test mit $\alpha = 0.05$

- *Nullhypothese:* $H_0 : \ \mu \geq 0.5$ *vs.* $H_1 : \mu < 0.5$ *(einseitig!)*
- *Testgröße: wie in Aufgabenteil a)*
- *Kritischer Bereich:*

$$K = \{(x_1, \ldots, x_{16}) \mid T(x_1, \ldots, x_{16}) < u_{0.05}\}$$

Fehler 2. Art: H_0 *wird fälschlicherweise nicht verworfen*
gesucht: $\mu_1 < 0.5$ *(unter* H_1*) mit* $P_{\mu=\mu_1}(T(X_1, \ldots, X_{16}) \notin K) \ \leq \ 0.1$
Es gilt: $\bar{X}_{(16)} \sim N\left(\mu_1, \frac{0.1^2}{16}\right)$ *unter der Annahme* $\mu = \mu_1$
Damit folgt:

$$\begin{aligned} P_{\mu=\mu_1}(T(X_1, \ldots, X_{16}) \notin K) &= P_{\mu=\mu_1}(\frac{\sqrt{16}}{0.1} \cdot \left(\bar{X}_{(16)} - 0.5\right) \geq -1.64) \\ &= P_{\mu=\mu_1}(40\left(\bar{X}_{(16)} - \mu_1\right) \geq -1.64 + 40 \cdot 0.5 - 40\mu_1) \\ &= P_{\mu=\mu_1}(\underbrace{40\left(\bar{X}_{(16)} - \mu_1\right)}_{\sim N(0,1)} \geq 18.36 - 40\mu_1) \\ &= 1 - \Phi(18.36 - 40\mu_1) \end{aligned}$$

gesucht: $\mu_1 < 0.5$ *mit*

$$\begin{aligned} & 1 - \Phi(18.36 - 40\mu_1) \ \leq 0.1 \\ \Leftrightarrow \ & \Phi(18.36 - 40\mu_1) \ \geq \ 0.9 \\ \Leftrightarrow \ & 18.36 - 40\mu_1 \ \geq \ u_{0.9} = 1.282 \\ \Leftrightarrow \ & \mu_1 \leq 0.42695 \end{aligned}$$

H 33 OC- und Gütefunktion

Ein Hersteller von Computerchips möchte den Anteil θ von Ausschussstücken in der Produktion überprüfen lassen ($0 \leq \theta \leq 1$). Um die Hypothese $H_0 : \theta \leq 0.01$ zu überprüfen, wurde folgender Test vorgeschlagen: Man entnimmt der laufenden Produktion eine Stichprobe von 30 Chips. Falls darunter mehr als 1 Ausschussstück ist, wird H_0 verworfen.

X_i *sei die Zufallsvariable, die den Zustand des* i*-ten Chips beschreibe:* $X_i = 0$*, falls der Chip funktionstüchtig ist, bzw.* $X_i = 1$ *sonst.*
Damit sind $X_1, \ldots, X_{30}$ *binomialverteilte,* $B(1, \theta)$*, unabhängige Zufallsvariablen.*
vorgeschlagener Test:

- *Nullhypothese:* $H_0 : \theta \leq 0.01$ *vs.* $H_1 : \theta > 0.01$

- *Testgröße:* $T(X_1, \ldots, X_{30}) = \sum_{i=1}^{30} X_i$
  Es gilt $T \sim B(30, \theta)$.
- *Kritischer Bereich:*

$$K = \left\{(x_1, \ldots, x_{30}) \in \{0,1\}^{30} \,|\, T(x_1, \ldots, x_{30}) > 1\right\}$$

a) Berechnen Sie die OC-Funktion und die Gütefunktion des Tests.

OC-Funktion:

$$\begin{aligned}
\beta(\theta) &= P_\theta((X_1, \ldots, X_{30}) \notin K) \\
&= P_\theta(T(X_1, \ldots, X_{30}) \leq 1) \\
&= P_\theta\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 1\right) \\
&= (1-\theta)^{30} + \binom{30}{1}\theta(1-\theta)^{29} \\
&= \theta(1-\theta)^{29}(1+29\theta)
\end{aligned}$$

Gütefunktion:

$$g(\theta) \;=\; 1 - \beta(\theta) \;=\; 1 - \theta(1-\theta)^{29}(1+29\theta)$$

b) Zeigen Sie, dass der vorgeschlagene Test ein Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ist.

Damit der vorgeschlagene Test ein Test zum Signifikanznivea $\alpha = 0.05$ *ist, muss gelten:*

$$P_{H_0}((X_1, \ldots, X_{30}) \in K) \leq 0.05$$

Es ist

$$P_{H_0}((X_1, \ldots, X_{30}) \in K) \;=\; P_{\theta \leq 0.01}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 1\right) \;=\; g_{\theta \leq 0.01}(\theta)$$

Außerdem ist $g(\theta)$ *monoton wachsend für* $0 \leq \theta \leq 1$, *da*

$$\begin{aligned}
g'(\theta) &= 29(1-\theta)^{28}(1+29\theta) - (1-\theta)^{29} \cdot 29 \\
&= 29(1-\theta)^{28}(1+29\theta-1+\theta) \;=\; 870\theta(1-\theta)^{28} \;\geq\; 0
\end{aligned}$$

für $0 \leq \theta \leq 1$. *Deshalb erhält man*

$$P_{H_0}((X_1, \ldots, X_{30}) \in K) \;=\; g_{\theta \leq 0.01}(\theta) \;\leq\; g(0.01) \;\approx\; 0.036 \;\leq\; 0.05$$

und der Test ist also ein Test zum Signifikanzniveau 0.05.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird H_0 nicht verworfen, wenn $\theta = 0.05$ gilt (Fehler 2. Art)?

gesucht: $P_{\theta=0.05}((X_1, \ldots, X_{30}) \notin K)$
Es gilt

$$P_{\theta=0.05}((X_1, \ldots, X_{30}) \notin K) \;=\; \beta(0.05) \;=\; 0.95^{29}(1 + 29 \cdot 0.05) \;\approx\; 0.5535$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5535 wird $H_0 : \theta \leq 0.01$ *nicht abgelehnt, obwohl* $\theta = 0.05$ *gilt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist also ziemlich groß.*

H 34 Zwei Wirtschaftsinformatiker wollen ihren Internetauftritt vergleichen und ermitteln dazu die Verweildauern (in Sekunden) der Besucher auf den jeweiligen Websites. Es ergeben sich folgende Durchschnittswerte und Streuungen:

	Besucherzahl	durchschnittl. Verweildauer	Streuung
Internetauftritt A	$m = 17$	$\bar{x} = 321.2$	$s_x = 47.0$
Internetauftritt B	$n = 16$	$\bar{y} = 286.5$	$s_y = 45.3$

Gehen Sie davon aus, dass die ermittelten Verweildauern als Realisierung unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen angesehen werden können.

a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.1$, ob die Annahme gleicher Varianzen bei beiden Internetauftritten gerechtfertigt ist.

Annahmen:
Verweildauern bei A: $X_1, \ldots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
Verweildauern bei B: $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
Alle Parameter sind unbekannt.
geeigneter Test: F-Test mit $\alpha = 0.1$

- *Nullhypothese:* $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ *vs.* $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- *Testgröße:*

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{S^2_{(m)}}{\tilde{S}^2_{(n)}}$$

- *Realisierung der Testgröße:*

$$T(x_1, \ldots, x_{17}, y_1, \ldots, y_{16}) \;=\; \frac{s_x^2}{s_y^2} \;=\; \frac{47^2}{45.3^2} \;\approx\; 1.0765$$

- *Kritischer Bereich:*

$$K = \{(x_1, \ldots, x_{17}, y_1, \ldots, y_{16}) \mid T(\ldots) < F_{16,15;0.05} \text{ oder } > F_{16,15;0.95}\}$$

- *Entscheidung: Wegen* $0.4251 \geq 1.0765 \leq 2.3849$ *wird* H_0 *nicht verworfen.*

b) Testen Sie unter geeigneten Annahmen auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass beide Websites gleich lange besucht werden.

Annahmen:
Verweildauern bei A: $X_1, \ldots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma^2)$
Verweildauern bei B: $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma^2)$
σ^2, μ_1, μ_2 *unbekannt*
geeigneter Test: Zwei-Stichproben-t-Test mit $\alpha = 0.05$

- *Nullhypothese:* $H_0: \ \mu_1 = \mu_2$ *vs.* $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
- *Testgröße:*

$$T(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n) = \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \cdot \frac{\bar{Y}_{(n)} - \bar{X}_{(m)}}{\sqrt{(m-1)S^2_{(m)} + (n-1)\tilde{S}^2_{(n)}}}$$

- *Realisierung der Testgröße:*

$$T(x_1, \ldots, x_{17}, y_1, \ldots, y_{16}) = \sqrt{\frac{17 \cdot 16 \cdot 31}{33}} \cdot \frac{286.5 - 321.2}{\sqrt{16 \cdot 47^2 + 15 \cdot 45.3^2}} \approx -2.1570$$

- *Kritischer Bereich:*

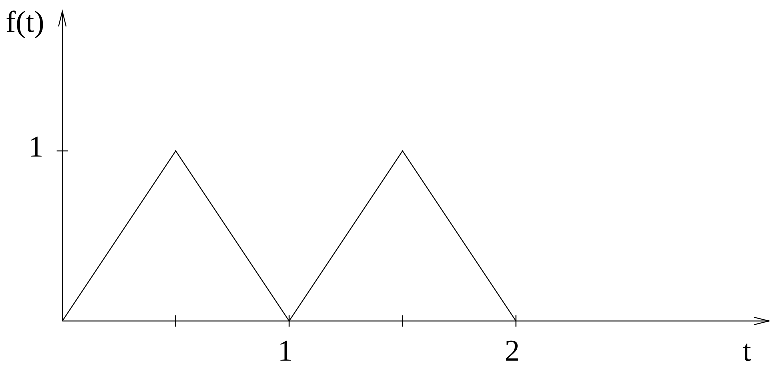
$$K = \{(x_1, \ldots, x_{17}, y_1, \ldots, y_{16}) \mid |T(\ldots)| > t_{31;0.975}\}$$

- *Entscheidung: Wegen* $|-2.1570| > 2.0395 = t_{31;0.975}$ *muss* H_0 *verworfen werden.*

H 35 Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit folgender Dichte f:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - 2|t - \frac{1}{2}| & \text{für } 0 \leq t < 1\,, \\ 1 - 2|t - \frac{3}{2}| & \text{für } 1 \leq t \leq 2\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie diese Dichte.



b) Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P(0 \leq X < 0.5)$, $P(0.5 \leq X < 1)$, $P(1 \leq X < 1.5)$, $P(1.5 \leq X \leq 2)$.

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten entsprechen jeweils dem Flächeninhalt eines halben Dreiecks, vgl. a):

$$P(0 \le X < 0.5) = \cdots = P(1.5 \le X \le 2) = \frac{1}{4}$$

c) Zur Überprüfung, ob sich ein bestimmtes Zufallsexperiment angemessen durch die Zufallsvariable X beschreiben lässt, wurden 500 unabhängige Experimente durchgeführt und folgende Daten beobachtet:

Klasse	[0;0.5)	[0.5;1)	[1;1.5)	[1.5;2]
Anzahl	95	135	140	130

Prüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob sich das Zufallsexperiment angemessen durch die obige Zufallsvariable beschreiben lässt.

geeigneter Test: χ^2-Anpassungstest

- *Nullhypothese:* $H_0 : (p_1, \dots, p_4) = \left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}\right)$,
  denn wegen b) gilt $p_i^0 = \frac{1}{4}$, $i = 1, \dots, 4$
- *Testgröße:*

$$Q(Y_1, \dots, Y_r; p_1^0, \dots, p_r^0) = \sum_{j=1}^{r} \frac{Y_j^2}{np_j^0} - n$$

- *Realisierung der Testgröße:*

$$Q(Y_1, \dots, Y_4; p_1^0, \dots, p_4^0) = \sum_{j=1}^{4} \frac{y_j^2}{500 \cdot \frac{1}{4}} - 500 = 10$$

- *Kritischer Bereich:*

$$K = \left\{(y_1, \dots, y_4) \,|\, Q(y_1, \dots, y_4; p_1^0, \dots, p_4^0) > \chi^2_{3;0.95}\right\}$$

- *Entscheidung: Wegen* $10 > 7.815 = \chi^2_{3;0.95}$ *wird* H_0 *verworfen.*

H 36 Exakter Test von Fisher

Zum Test, ob ein Mittel gegen Schädlingsbefall tatsächlich hilft, wurden 25 gleichartige Topfpflanzen beobachtet, von denen 10 Pflanzen mit dem Mittel behandelt wurden. Nach Ablauf eines vorher festgelegten Zeitraums wurde das folgende Ergebnis ermittelt:

	behandelt	nicht behandelt
Befall	3	11
kein Befall	7	4

Überprüfen Sie mit Hilfe des exakten Tests von Fisher zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob Behandlung und Schädlingsbefall unabhängig sind.

Hinweis:

Für $p_i = \dfrac{\binom{10}{i}\binom{15}{14-i}}{\binom{25}{14}}$ ergibt sich auf 5 Dezimalstellen gerundet:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.00000	0.00024	0.00459	0.03675	0.14148	0.28296	0.30317	0.17324	0.05053

Exakter Test von Fischer mit $\alpha = 0.05$

- *Nullhypothese: Die Zufallsvariablen* X = *"Befall" und* Y=*"Behandlung" sind voneinander unabhängig*
- *Testgröße:* n_{11} *aus der Vierfeldertafel*
- *Realisierung der Testgröße:* $n_{11} = 3$

	behandelt	*nicht behandelt*	Σ
Befall	**3**	*11*	*14*
kein Befall	*7*	*4*	*11*
Σ	*10*	*15*	*25*

- *Kritischer Bereich:*
  Bestimmung der Quantile mit Hilfe der tabellierten Werte: Wegen

  $$0.00483 \;=\; P(X \le 2) \;\le\; 0.025 \;<\; P(X \le 3) \;=\; 0.04158$$

  erhält man

  $$h^*_{0.025} \;=\; \inf\{t : P(X \le t) > 0.025\} \;=\; 3$$

  und wegen

  $$0.94243 \;=\; P(X \le 7) \;<\; 0.975 \;\le\; P(X \le 8) \;=\; 0.99296$$

  gilt

  $$h_{0.975} \;=\; \inf\{t : F(t) \ge 0.975\} \;=\; 8$$

  Also ist

  $$K = \{n_{11} \mid n_{11} < 3 \; oder \; n_{11} > 8\}$$

  der kritische Bereich.
- *Entscheidung: Da* $n_{11} = 3 \ge 3$ *liegt die Beobachtung nicht im kritischen Bereich.* H_0 *wird deshalb nicht verworfen.*