Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
B. Niese

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.06./22.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik für WInf, LaB, CE Übung 5

Raumaufteilung für die Semestralklausur für WInf und LaB am 15.07.06 von 8.00-10.00 Uhr:

Buchstaben A-Kn in S311/08
Buchstaben Ko-Ol in S103/221
Buchstaben Om-Si in S311/0012
Buchstaben Sj-Z in S103/23

Zugelassene Hilfsmittel bei der Semestralklausur (sowie beim Vordiplom Mathematische Statistik für WInf) sind alle schriftlichen Unterlagen, Bücher und Taschenrechner.

Gruppenübung

G 13 Kolmogoroff-Smirnov-Test

Bei einer ärztlichen Routineuntersuchung einer Klasse von 20 (männlichen) Schülern wurde u.a. auch die Körpergröße [in cm] jedes Schülers gemessen. Es ergaben sich folgende Messwerte:

114	116	117	117	119	120	120	121	122	122
124	126	127	128	128	129	129	132	133	133

Mit Hilfe des Kolmogoroff-Smirnov-Tests soll die Vermutung überprüft werden, dass die Messdaten durch $R(114, 134)$-verteilte Zufallsvariablen angemessen beschrieben werden können.

a) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion der Messreihe.

b) Zeichnen Sie in die Skizze aus a) den Graphen der Rechteckverteilung ein. Lesen Sie den maximalen Abstand d^* zwischen der zuletzt eingezeichneten Funktion und der empirischen Verteilungsfunktion ab.

c) Wird die Vermutung zum Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt?

G 14 Arithmetisches Mittel als Schätzer, Rechteckverteilung

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch $R(\theta - 1, \theta + 1)$-verteilt, mit $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt.

a) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Berechnen Sie die Varianz und den mittleren quadratischen Fehler des Schätzers T_n.

c) Ist die Folge der Schätzer $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für $\tau(\theta) = \theta$?

G 15 Maximum-Likelihood-Schätzer, verschobene Exponentialverteilung

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-\theta)} & \text{falls } x \geq \theta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von T_n an.

c) Bestimmen Sie den Bias und den mittleren quadratischen Fehler von T_n.

d) Ist die Folge der Schätzer $T_1, T_2, \ldots$ asymptotisch erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$?

Hinweis: Bestimmen Sie zur Bearbeitung der Teilaufgaben c) und d) zunächst die Verteilung der Zufallsvariablen $T_n - \theta$.

Hausübung

H 25 Kolmogorov-Smirnov-Test, Exponentialverteilung

Es wird vermutet, dass die Dauer eines Telefongesprächs (in Minuten) mit einer gewissen Auskunftszentrale durch eine mit Parameter $\lambda = 1$ exponentialverteilte Zufallsvariable gut modelliert werden kann. Die folgenden Daten geben die Dauer von 6 Gesprächen an:

$$0.75\ ,\ 0.52\ ,\ 1.26\ ,\ 1.53\ ,\ 0.18\ ,\ 3.93$$

a) Skizzieren Sie die zu den Daten gehörige empirische Verteilungsfunktion und die vermutete Verteilungsfunktion.

b) Überprüfen Sie die obige Hypothese mit Hilfe des Kolmogoroff-Smirnov-Tests auf der Basis der erhobenen Daten zum Niveau 0.1. Der Wert der entsprechenden Teststatistik soll nicht aus der Skizze in a) abgelesen, sondern aus den Daten berechnet werden.

H 26 Maximum-Likelihood-Schätzer für einen diskreten Parameter

Eine Urne enthält schwarze und weiße Kugeln, der Anteil der schwarzen Kugeln sei θ. Es ist bekannt, dass das Verhältnis von schwarzen zu weißen Kugeln 3:1, 1:1 oder 1:2 beträgt. Um das tatsächlich vorliegende Verhältnis zu schätzen, werden der Urne drei Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ für θ, falls nur eine Realisierung x der Zufallsvariablen X vorliegt.

b) Es werden zwei Stichproben entnommen, wobei nach der ersten Stichprobe auch die letzte gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird und alle Kugeln gemischt werden (Unabhängigkeit der Stichproben). Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer, falls in der ersten Stichprobe jede und in der zweiten Stichprobe keine der drei Kugeln schwarz ist.

H 27 Schätzer, Rechteckverteilung

Für ein $\theta > 0$ sei $X_1, \dots, X_n$ eine Folge von unabhängigen, identisch $R(\theta, 3\theta)$-verteilten Zufallsvariablen.

a) Bestimmen Sie den Bias und die Varianz des folgenden Schätzers für $\tau(\theta) = \theta$:

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

b) Ist die Folge der Schätzer $T_1, T_2, \dots$ konsistent?

c) Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$\widetilde{T}_n(X_1, \dots, X_n) = (T_n(X_1, \dots, X_n))^2 = \frac{1}{4n^2} \Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \Big)^2$$

nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$ ist. Modifizieren Sie $\widetilde{T}_n$ geeignet, so dass sich ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$ ergibt.

d) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für $\tau(\theta) = Var_\theta(X_1)$ an.

H 28 Maximum-Likelihood-Schätzer

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{x}{\theta^2} \cdot e^{-x/\theta} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c > 0$ eine Konstante und $\theta > 0$ den unbekannten Parameter bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

c) Überprüfen Sie T_n auf Erwartungstreue.

H 29 Konfidenzintervalle, Normalverteilung

In einer Stadt liegen für 161 Jahre Niederschlagsmessungen im Monat April vor. Die Messreihe $x_1, \dots, x_{161}$ (x_i = Niederschlagshöhe [in mm] im i-ten Jahr) hat das arithmetische Mittel $\overline{x} = 53.68$ und die empirische Streuung $s = 6.13$. Es wird angenommen, dass die Daten eine Realisierung von 161 unabhängigen, identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen sind. Bestimmen Sie mit geeigneten Konfidenschätzverfahren zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ je ein konkretes Schätzintervall

a) für μ

b) für σ^2

c) für μ unter der Voraussetzung, dass $\sigma^2 = 6.13^2$.

Eventuell benötigte Quantile: $t_{160;0.975} \approx 1.975$, $\chi^2_{160;0.025} \approx 126.87$, $\chi^2_{160;0.975} \approx 196.92$

H 30 Konfidenzintervalle

Ein Hersteller von Überraschungseiern verspricht in jedem siebten Ei eine besondere Überraschung. Zur Überprüfung dieser Werbeaussage kauft eine Verbraucherschutzorganisation $n = 500$ Eier.

a) Bestimmen Sie ein „approximatives“ konkretes Schätzintervall für den unbekannten Anteil p an besonderen Überraschungen zum Konfidenzniveau 0.99, wenn 68 der überprüften Eier eine besondere Überraschung enthielten.

b) Bestimmen Sie ein n so, dass das in a) verwendete Konfidenzschätzverfahren zum Niveau 0.99 Schätzintervalle liefert, deren Länge nicht größer als 0.04 ist.

Bemerkung: Verwenden Sie als „approximatives“ konkretes Schätzintervall das etwas schwieriger zu berechnende der beiden im Buch aufgeführten Intervalle (also $I(y)$ statt $\tilde{I}(y)$).