Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
B. Niese

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

07.06./08.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik
für WInf, LaB, CE
Übung 4

Achtung: Ab sofort wird das aktuelle Übungsblatt schon einige Tage vor den Übungen im Internet zu finden sein.

Gruppenübung

G 10 χ^2-, t- und F-Verteilung

a) Es sei X eine χ^2_r-verteilte Zufallsvariable.

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 15.31)$ bei $r = 28$ Freiheitsgraden.

(ii) Bestimmen Sie für $r = 550$ näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 610)$.

b) Es sei X eine t_r-verteilte Zufallsvariable.

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2.18)$ bei $r = 12$ Freiheitsgraden.

(ii) Bestimmen Sie für $r = 45$ näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1.6)$.

c) Es sei X eine $F_{r,s}$-verteilte Zufallsvariable.

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2.54)$ bei $r = 10$ und $s = 15$ Freiheitsgraden.

(ii) Bestimmen Sie eine Schranke c so, dass bei $r = 11$ und $s = 15$ Freiheitsgraden $P(X \leq c) = 0.01$ gilt.

G 11 Binomialverteilung und Grenzwertsätze

Zur Untersuchung von Wählerwanderungen befragte ein Meinungsforschungsinstitut 900 zufällig ausgewählte wahlberechtigte Bürger Hessens nach ihrer letzten Landtagswahlentscheidung. Für die Partei A haben bei der Wahl nur 0.5% der hessischen Wähler gestimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 900 befragten Bürgern höchstens einer die Partei A gewählt hat

a) mit Hilfe der Binomialverteilung,

b) durch Anwendung des Poissonschen Grenzwertwatzes,

c) durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes sowohl mit als auch ohne Stetigkeitskorrektur.

G 12 Ungleichung von Tschebyscheff, Zentraler Grenzwertsatz

In einer belgischen Schokoladenfabrik werden Pralinen hergestellt, deren Durchmesser einen Sollwert von 25 mm besitzen. Damit die Pralinen in die vorgefertigten Pralinenschachteln passen, muss überprüft werden, ob der Sollwert hinreichend genau eingehalten wird. Zu diesem Zweck sollen die Durchmesser einer bestimmten Anzahl von Pralinen nachgemessen werden. Aus Erfahrung weiß man, dass die Durchmesser der Pralinen als Realisierung unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit der Varianz 4 $[mm^2]$ beschrieben werden können. Wieviele Messungen sind durchzuführen, damit die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 kleiner als 0.5 mm ist?

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung eine untere Schranke für die gesuchte Anzahl.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für die gesuchte Anzahl.

Hausübung

H 19 χ^2**-,** t**- und** F**-Verteilung**

a) Sei X eine t-verteilte Zufallsvariable mit 20 Freiheitsgraden. Bestimmen Sie das 0.95-Quantil von X sowie das 0.95-Quantil von X^2.

b) Bestimmen Sie folgende Quantile mit Hilfe der Ihnen zur Verfügung gestellten Quantiltafeln (wenn möglich exakt):

$$\chi^2_{189;0.99}, \quad \chi^2_{21;0.1}, \quad t_{139;0.05}, \quad F_{4,15;0.95}, \quad F_{15,3;0.01}$$

H 20 χ^2**-,** t**- und** F**-Verteilung**

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{100}$ seien unabhängig und identisch $N(0,1)$-verteilt. Bestimmen Sie Zahlen s_1, s_2 und s_3 so, dass gilt

(i) $P(X_1^2 + \ldots + X_{20}^2 \geq s_1) = 0.05$

(ii) $P(X_{29}^2/(X_1^2 + \ldots + X_{28}^2) \leq s_2) = 0.95$

(iii) $P(|X_1 + \ldots + X_{100}|/100 \leq s_3) = 0.95$

H 21 Stichprobenvarianz, χ^2**- und** F**-Verteilung**

a) Seien $X_1, \ldots, X_{21}$ unabhängig und identisch $N(0, 21)$-verteilt. Mit

$$S^2_{(n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_{(n)})^2$$

sei die Stichprobenvarianz bezeichnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $S^2_{(21)}$ größer als 22 ist.

b) Seien $X_1, \ldots, X_{15}, Y_1, \ldots, Y_5$ uanbhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt. $S^2_{(15)}$ bezeichne die Stichprobenvarianz zu $X_1, \ldots, X_{15}$ und $\widetilde{S}^2_{(5)}$ bezeichne die Stichprobenvarianz zu $Y_1, \ldots, Y_5$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $S^2_{(15)}$ um 10% größer ist als $\widetilde{S}^2_{(5)}$.

Hinweis: $\chi^2_{20;0.6} \approx 20.95$, $F_{14,4;0.485} \approx 1.1$

H 22 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

Bei einer Fluggesellschaft weiß man, dass im Mittel 8% derjenigen Personen, die sich einen Platz für einen Flug auf einer bestimmten Route reservieren lassen, zum Abflug nicht erscheinen. Um die Zahl der ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen 400-sitzigen Jet 420 Platzreservierungen vorgenommen.

a) Berechnen Sie mittels des Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erscheinenden Personen, für die ein Platz reserviert wurde, auch einen Platz erhalten. Nehmen Sie dabei an, daß die Entscheidungen darüber, ob die einzelnen Reservierungen wahrgenommen werden, unabhängig zustande kommen.

b) Wieviele Platzreservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit mindestens 95% beträgt? Geben Sie die Antwort mit Hilfe einer Näherungsrechnung.

H 23 Zentraler Grenzwertsatz, Poissonverteilung

Die Anzahlen der Anrufe, die pro Minute in der Telefonzentrale eines großen Betriebs eingehen, mögen sich durch unabhängige, mit dem Parameter $\lambda = 4$ poissonverteilte Zufallsvariablen beschreiben lassen.

a) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stunde mindestens 250 Anrufe ankommen.

b) Die Telefonanlage ist ausgefallen. Wie viele Minuten darf die Reparatur dauern, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Ausfallzeit mehr als 200 Anrufe ankommen werden, höchstens 5 % betragen darf?

H 24 Hypergeometrische Verteilung, Grenzwertsätze

Eine Lieferung von 500 Schrauben enthalte 10 defekte Exemplare. Berechnen Sie unter geeigneten Annahmen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 zufällig (ohne Zurücklegen) herausgegriffenen Schrauben höchstens eine defekt ist

a) exakt,

b) durch Anwendung der Binomialapproximation der hypergeometrischen Verteilung,

c) durch näherungsweise Berechnung der Binomialwahrscheinlichkeiten in b) mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes.