Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

31.05./01.06.2006

Einführung in die Mathematische Statistik für WInf, LaB, CE Übung 3

Achtung: Die nächsten Übungen finden schon in der kommenden Woche nämlich am 07./08.06.2006 statt.

Gruppenübung

G 7 Normalverteilung

Es seien W und X unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen, wobei $X \sim N(3, 4)$ und $W \sim N(4, 2)$ gelten.

a) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
 (i) $P(X > 1)$
 (ii) $P(0.5 \le X \le 2.5)$
 (iii) $P(X < -1)$

b) Bestimmen Sie den Median von X.

c) Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y = 2X - 1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y \le 0)$ und das 0.9-Quantil von Y.

d) Wie ist die Zufallsvariable $3X - 5W + 10$ verteilt?

G 8 Mehrdimensionale Zufallsvariable

Eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le s, t \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x, y)$.

b) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y sowie zugehörige Dichten.

c) Berechnen Sie die Kovarianz $Cov(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\varrho(X, Y)$.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X + Y \le \frac{1}{2})$.

G 9 Minimum/Maximum und Exponentialverteilung

a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen

$$Y = \max(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{und} \qquad Z = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

b) Ein technisches System bestehe aus den Komponenten $K_1, \ldots, K_n$, die

(i) hintereinandergeschaltet bzw. (ii) parallelgeschaltet

sind. Im Fall (i) fällt das System aus, sobald mindestens eine Komponente ausgefallen ist, im Fall (ii) fällt das System aus, sobald alle Komponenten ausgefallen sind. Es wird angenommen, dass die Lebensdauern der Komponenten (in Stunden) als Realisierungen unabhängiger, mit demselben Paramter λ exponentialverteilter Zufallsvariablen angesehen werden können. In jedem der beiden Fälle (i) und (ii) bestimme man die Verteilungsfunktion der Lebensdauer des Systems und berechne unter der Voraussetzung $\lambda = 0.25$ und $n = 4$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer des Systems größer als 5 Stunden ist.

Hausübung

H 13 Normalverteilung, Ungleichung von Tschebyscheff

Die Füllmenge einer automatisch abgefüllten Kaffepackung lasse sich durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 500[g]$ und Varianz $\sigma^2 = 4[g^2]$ beschreiben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllung einer zufällig der Produktion entnommenen Kaffeepackung weniger als $495[g]$ beträgt?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllung einer zufällig der Produktion entnommenen Kaffeepackung mehr als 0.5% vom Erwartungswert abweicht. Welche Schranke liefert die Ungleichung von Tschebyscheff?

c) Welche Mindestfüllmenge darf auf der Verpackung angegeben werden, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Füllmenge unterschritten wird, höchstens 0.01 betragen soll?

d) Der Hersteller erwägt, die Abfüllmaschine auf eine höhere Abfüllmenge einzustellen, so dass als Mindestfüllmenge $500[g]$ angegeben werden darf, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Unterschreiten dieser Füllmenge wiederum höchstens 0.01 betragen soll. Unter der Annahme, dass sich die Füllmenge nach der Neueinstellung durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\widetilde{\mu}$ und Varianz $\sigma^2 = 4[g^2]$ beschreiben lässt, bestimme man die mindestens einzustellende Füllmenge $\widetilde{\mu}$.

H 14 Stetige Zufallsvariable, Verteilungsfunktion

Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{für } 0 < x < 2 \\ c - \frac{1}{2}e^{2-x} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

mit einer bestimmten Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Ohne eine Dichte der Zufallsvariablen X zu berechnen, bestimme man

a) den Wert von c,

b) die Wahrscheinlichkeit $P(1/2 < X \leq 3)$,

c) den Erwartungswert von X,

d) die Varianz von X.

H 15 Linearkombinationen unabhängiger Zufallsvariablen

Die Zufallsvariablen X_i, $i = 1, 2, 3$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert 1 und Varianz 4. Seien weiterhin

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \qquad \text{und} \qquad Y_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}.$$

a) Vergleichen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen Y_1 und Y_2.

b) Bestimmen Sie die Kovarianz $Cov(Y_1, Y_2)$ und den Korrelationskoeffizienten $\varrho(Y_1, Y_2)$.

H 16 Zweidimensionale diskrete Verteilung

Eine Münze wird zweimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der aufgetretenen "Wappen". In einem darauffolgenden Zufallsexperiment werden $1 + X$ Münzen geworfen, wobei die Anzahl der erhaltenen "Wappen" durch die Zufallsvariable Y beschrieben werde.

a) Unter geeigneten Annahmen bestimme man die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = i, Y = j), \qquad i = 0, 1, 2, \; j = 0, 1, 2, 3,$$

und gebe sie in Form einer Tabelle an.

b) Man bestimme die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

H 17 Nichtlineare Transformation einer rechteckverteilten Zufallsvariablen

Seien X eine in $[0, \pi]$ rechteckverteilte Zufallsvariable, $U = \cos(X)$ und $V = \sin(X)$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $|U|$.

b) Berechnen Sie $P(|U| \leq |V|)$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von U.

H 18 Zweidimensionale stetige Verteilung

Eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f(s,t) = \begin{cases} s + t & \text{für } 0 \leq s\,,\, t \leq 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x, y)$, die Randverteilungen F_X und F_Y sowie die Randdichten f_X und f_Y.

b) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y. Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?