Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10./11. Mai 2006

Einführung in die Mathematische Statistik für WInf, LaB, CE Übung 2

Gruppenübung

G 4 Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, vier davon heißen Buben. Nach dem Mischen der Karten erhalten die drei Spieler (Andreas, Bettina und Claudia) jeweils 10 Karten. Die verbliebenen zwei Karten bilden den sogenannten Skat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es liegen genau zwei Buben im Skat.

B: Claudia hat genau einen Buben.

C: Bettina hat mindestens zwei Buben.

D: Andreas hat genau einen Buben unter der Bedingung, dass Claudia genau einen Buben hat.

E: Jeder der drei Spieler hat mindestens einen Buben.

G 5 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Familie genau k Kinder hat, sei $p_k = \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^k$, $k \geq 0$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig herausgegriffenen Kind um einen Jungen handelt, sei $\frac{13}{25}$. Für die Geschlechtszugehörigkeit verschiedener Kinder innerhalb einer Familie wird die Unabhängigkeitsannahme gemacht.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den Kindern einer zufällig ausgewählten Familie genau zwei Jungen sind?

b) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Jungen genau eine Schwester haben, falls es sich um eine in a) beschriebene Familie handelt?

Hinweis: $\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p^{k-2} = \frac{2}{(1-p)^3}$ für $0 < p < 1$.

G 6 a) Beim Roulette tritt in einem Spiel eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ auf. Ein abergläubischer Spieler beginnt erst mit dem Spiel, nachdem zum ersten Mal eine seiner Unglückszahlen 3,7 oder 13 aufgetreten ist. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl von Runden, die der Spieler warten muss, bevor er mit seinem Spiel beginnen kann. Bestimmen Sie die Verteilung von X und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X > 4)$.

b) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechnen Sie für diese Seite die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- Innerhalb einer Minute gibt es genau eine Abfrage.
- Es gibt mehr als 2 Abfragen innerhalb einer Minute.

Hausübung

H 7 Herr Keller fährt jeden Morgen mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur Arbeit. Da er ein Frühaufsteher ist, verpasst er nie den Zug, der ihn von seinem Wohnort in die Stadt bringt, in der er arbeitet. Am dortigen Bahnhof hat Herr Keller mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% so viel Verspätung, dass er in jedem Fall nach 8 Uhr in seinem Büro ist, weil er keinen Anschluss hat. Anderenfalls setzt er seinen Weg mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 bzw. 0.4 bzw. 0.1 mit dem Bus bzw. mit der Straßenbahn bzw. zu Fuß fort, wobei er dann jeweils in 20% bzw. 25% bzw. 50% der Fälle erst nach 8 Uhr an seinem Arbeitsplatz eintrifft.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das die obige Situation beschreibt, und beschriften Sie die Äste und Knoten.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Keller nach 8 Uhr an seinem Arbeitsplatz eintrifft unter der Bedingung, dass er am Bahnhof Anschluss hat.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Keller nach 8 Uhr an seinem Arbeitsplatz eintrifft.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Keller am Bahnhof Anschluss hat unter der Bedingung, dass er nach 8 Uhr im Büro ist.

H 8 Drei unterscheidbare Würfel werden gleichzeitig geworfen. Geben Sie zunächst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ an und untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf paarweise und vollständige Unabhängigkeit:

A: Erster und zweiter Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.

B: Die Augensumme der beiden letzten Würfel ist durch 3 teilbar.

C: Erster und dritter Würfel zeigen verschiedene Augenzahlen.

H 9 Ein Würfel wird geworfen. Erscheint die Augenzahl 1, so wird er ein zweites Mal geworfen, und die beiden Augenzahlen werden multipliziert. Anderenfalls wird nur die erste Augenzahl notiert. Die Zufallsvariable X beschreibe das Ergebnis dieses Zufallsexperiments.

a) Geben Sie die Verteilung von X in Form einer Tabelle an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

H 10 Eine Aufgabe aus der Qualitätskontrolle: Einer umfangreichen Lieferung von elektronischen Bauteilen werden zu Prüfzwecken 10 Bauteile entnommen. Die Anzahl der Ausschussstücke in einer solchen Stichprobe lässt sich durch eine $B(10, p)$-verteilte Zufallsvariable X beschreiben, wobei p der (unbekannte) Ausschussanteil in der Gesamtlieferung ist. Die Lieferung wird sofort angenommen, wenn höchstens ein Ausschussteil in der Stichprobe vorkommt. Anderenfalls wird die gesamte Lieferung kontrolliert, und alle defekten Teile werden ersetzt.

a) Berechnen Sie für $0 \le p \le 1$ die Wahrscheinlichkeit $w(p)$ dafür, dass die Lieferung sofort angenommen wird.

b) Zeigen Sie, dass $w(p)$ eine monoton fallende Funktion von p ist.

c) Die Zufallsvariable Z beschreibe den Ausschussanteil der Lieferung nach der Kontrolle. Man bestimme in Abhängigkeit von p die Verteilung und den Erwartungswert $a(p)$ von Z.
($a(p)$ wird als *average outgoing quality* bezeichnet.)

d) Man bestimme

$$a_{\max} = \max_{0 \le p \le 1} a(p).$$

($a_{\max}$ wird als *average outgoing quality limit* bezeichnet.)

H 11 Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^4} & \text{für } x > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von X.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 2| \le 1)$.

d) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X^2 sowie die Varianz von X.

H 12 In einer Getränkefabrik werden 1-Liter-Flaschen eines Erfrischungsgetränks maschinell abgefüllt. Die Erfahrung zeigt, dass im Mittel 5% aller abgefüllten Flaschen weniger als $0.97l$ und 2% aller abgefüllten Flaschen mehr als $1.03l$ des betreffenden Getränks enthalten. Die zufällig in eine Flasche eingefüllte Getränkemenge wird als Wert einer Zufallsvariablen X angesehen. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 von X unter der Annahme, dass X eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable ist.