HAUSÜBUNGEN

H25 a) geordnete Messreihe:

0.18, 0.52, 0.75, 1.26, 1.53, 3.93

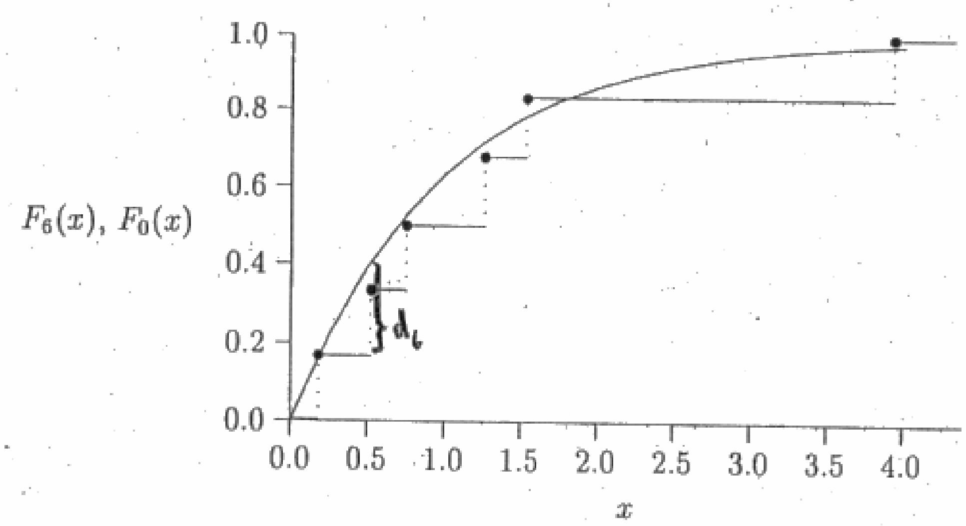
vermutete Verteilungsfkt.:

$$F_0(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wertetabelle für F_0 (insbes. für b))

x	0.18	0.52	0.75	1.26	1.53	3.93
$F_0(x)$	0.1647	0.4055	0.5276	0.7163	0.7835	0.9804

Skizze:



b) Kolmogoroff-Smirnov-Test:

H_0: $F = F_0$ $\quad$ H_1: $F \neq F_0$

wobei F die wahre Verteilungsfunktion zur Beschreibung der Gesprächsdauer ist.

Testgröße: $D_6 = \sup_{z \in \mathbb{R}} |F_6(z; X_1, \dots, X_6) - F_0(z)|$

Realisierung der Testgröße:

Dazu überprüfen wir an den Sprungstellen von F_6 den Abstand zu F_0:

$x_{(0)} := 0$

i	1	2	3	4	5	6
$\lvert F_6(x_{(i)}) - F_0(x_{(i)})\rvert$	0.0019	0.0721	0.0276	0.0497	0.0499	0.0196
$\lvert F_6(x_{(i-1)}) - F_0(x_{(i)})\rvert$	0.1647	0.2388	0.1943	0.2163	0.1168	0.1470

Aus der Tabelle liest man ab:

$$d_6(x_1, \dots, x_6) = \underline{0.2388}$$

Kritischer Bereich:

$$K = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}_+^6 : D_6(x_1, \dots, x_6) > \tfrac{1.23}{\sqrt{6}}\}$$

da $P(D_6 > \frac{1.23}{\sqrt{6}}) = P(\sqrt{6}\, D_6 > 1.23) = 1 - K(1.23) \approx 0.1$ mit der Kolmog. Vert.-fkt. K.

Entscheidung: Wegen $0.2388 < \frac{1.23}{\sqrt{6}} \approx 0.5021$ wird H_0 nicht verworfen.

H26 X: Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe

$\theta \in \Theta = \{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \}$

$P_\theta(X = i) = \binom{3}{i} \theta^i \cdot (1-\theta)^{3-i} \qquad i = 0,1,2,3$

(denn $X \sim B(3, \theta)$)

a)

$i \backslash \theta$	$3/4$	$1/2$	$1/3$
0	0.016	0.125	0.296
1	0.141	0.375	0.444
2	0.422	0.375	0.222
3	0.422	0.125	0.037

Die eingekreisten Werte ergeben den ML-Schätzer $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0,1 \\ \frac{3}{4} & x = 2,3 \end{cases}$$

b)

θ	$3/4$	$1/2$	$1/3$
$P_\theta(X_1 = 3, X_2 = 0)$	0.007	0.016	0.011

Berechnung erfolgt gemäß

$$P_\theta(X_1 = 3, X_2 = 0) \underset{\text{unabh.}}{=} P_\theta(X_1 = 3) \cdot P_\theta(X_2 = 0) = \theta^3 (1-\theta)^3$$

Der ML-Schätzer ist nun $\hat{\theta}(3,0) = \underline{\frac{1}{2}}$

H27 a) $E_\theta(T_n) = E_\theta\left(\frac{1}{2}\overline{X}_{(n)}\right) = \frac{1}{2}E_\theta(X_1)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta+3\theta}{2} = \underline{\theta}$$

Bias: $E_\theta(T_n) - \theta = \theta - \theta = \underline{0}$

T_n ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$.

$$\mathrm{Var}_\theta(T_n) = \mathrm{Var}_\theta\left(\frac{1}{2}\overline{X}_{(n)}\right) = \frac{1}{4n}\mathrm{Var}_\theta(X_1)$$

$$= \frac{1}{4n}\cdot\frac{(3\theta-\theta)^2}{12} = \underline{\frac{\theta^2}{12n}}$$

b) $T_1, T_2, \ldots$ ist eine Folge von erwartungstreuen Schätzern mit

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta^2}{12n} = 0 \quad \forall\theta>0$$

Mit Satz 3.10 folgt die Konsistenz der Schätzerfolge.

c) $E_\theta(\tilde{T}_n) = E_\theta(T_n^2) = \mathrm{Var}_\theta(T_n) + [E_\theta(T_n)]^2$

$$= \frac{\theta^2}{12n} + \theta^2 = \underline{\frac{1+12n}{12n}\theta^2} \neq \theta^2$$

Betrachte $\frac{12n}{1+12n}\tilde{T}_n = \frac{3}{n+12n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 =: T_n^*$.

$$E_\theta(T_n^*) = \frac{12n}{1+12n}E_\theta(\tilde{T}_n) = \theta^2$$

Also ist T_n^* erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$.

d) $\mathrm{Var}_\theta(X_1) = \frac{\theta^2}{3}$. Mit dem Ergebnis aus c) gilt:

Der Schätzer $\frac{1}{3}T_n^*$ ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(X_1)$,

denn

$$E_\theta\left(\frac{1}{3}T_n^*\right) = \frac{1}{3}E_\theta(T_n^*) \overset{c)}{=} \frac{\theta^2}{3} = \mathrm{Var}_\theta(X_1)$$

4

H28 a) Bedingung: $\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)\,dx = 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)\,dx = c\int_0^\infty \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{c}{\theta^2}\int_0^\infty x\, e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx$$

$$= \frac{c}{\theta^2}\left[-\theta x e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^\infty + \frac{c}{\theta^2}\int_0^\infty \theta e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx$$

$$= 0 + \frac{c}{\theta}\left[-\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^\infty = \frac{c}{\theta}(0+\theta) = c, \quad \text{also } \underline{c=1}$$

b) Likelihood-Funktion:

$$L(\theta; x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \begin{cases} \theta^{-2n}\prod_{i=1}^n x_i\, e^{-\sum_{i=1}^n x_i/\theta} & \text{falls } x_i \geq 0\ \forall i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmung der Maximalstelle für $x_1,\dots,x_n \geq 0$:

$$g(\theta) := \ln L(\theta; x_1,\dots,x_n) = -2n\ln\theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i \begin{cases} >0 & \Leftrightarrow \theta < \frac{1}{2n}\sum_i x_i \\ =0 & \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2n}\sum_i x_i \\ <0 & \Leftrightarrow \theta > \frac{1}{2n}\sum_i x_i \end{cases}$$

Also ist an der Stelle $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i$ eine Maximalstelle,

d.h. $T_n(X_1,\dots,X_n) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i = \underline{\frac{1}{2}\overline{X}_{(n)}}$

ist ML-Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$.

c) $E_\theta(T_n) = \frac{1}{2}E_\theta(\overline{X}_{(n)}) = \frac{1}{2}E_\theta(X_1) = \underline{\theta}$, da

$$E_\theta(X_1) = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\theta}\right)^2 e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \theta\int_0^\infty z^2 e^{-z}\,dz$$

$$= \theta\left[-z^2 e^{-z}\right]_0^\infty + 2\theta\int_0^\infty z e^{-z}\,dz = 2\theta\left[-z e^{-z}\right]_0^\infty + 2\theta\int_0^\infty e^{-z}\,dz$$

$$= 2\theta\left[-e^{-z}\right]_0^\infty = \underline{2\theta}$$

$\Rightarrow T_n$ ist nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$

H29 a) Schätzintervall für μ (Le/We, Satz 3.26):

$$I(x_1,\dots,x_n) = \left[\overline{x} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s^2}{n}},\ \overline{x} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right]$$

$$= \left[53.68 - t_{160;0.975}\frac{6.13}{\sqrt{161}},\ 53.68 + t_{160;0.975}\frac{6.13}{\sqrt{161}}\right]$$

$$\approx \underline{[52.726\ ;\ 54.634]}$$

mit $t_{160;0.975} = 1.9749$

b) Schätzintervall für σ^2 (Le/We, Satz 3.28):

$$I(x_1,\dots,x_n) = \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}\ ;\ \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n;\alpha/2}}\right]$$

$$= \left[\frac{160\cdot 6.13^2}{\chi^2_{160;0.975}}\ ;\ \frac{160\cdot 6.13^2}{\chi^2_{160;0.025}}\right]$$

$$\approx \underline{[30.532\ ;\ 47.391]}$$

mit $\chi^2_{160;0.975} = 196.918$

und $\chi^2_{160;0.025} = 126.866$

c) Schätzintervall für μ mit $\sigma^2 = 6.13^2$ (Satz 3.25):

$$I(x_1,\dots,x_n) = \left[\overline{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[53.68 - u_{0.975}\frac{6.13}{\sqrt{161}},\ 53.68 + u_{0.975}\frac{6.13}{\sqrt{161}}\right]$$

$$= \underline{[52.733\ ;\ 54.627]}$$

mit $u_{0.975} = 1.96$

#130 a) Mit $\alpha = 0.01$ ergibt sich $c = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.995} = 2.58$.

Ein approximatives Konfidenzintervall für den Binomialverteilungsparameter p erhält man mit Formel (87)

Realisierung der unteren Grenze:

$$U(y) = \frac{1}{n+c^2}\left(y + \frac{c^2}{2} - c\sqrt{\frac{y(n-y)}{n} + \frac{c^2}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{500+2.58^2}\left(68 + \frac{2.58^2}{2} - 2.58\sqrt{\frac{68 \cdot 432}{500} + \frac{2.58^2}{4}}\right)$$

$$\approx \underline{0.1012}$$

Realisierung der oberen Grenze:

$$O(y) = \frac{1}{n+c^2}\left(y + \frac{c^2}{2} + c\sqrt{\frac{y(n-y)}{n} + \frac{c^2}{4}}\right) \approx \underline{0.1804}$$

$$I(68) = \underline{[0.1012 ; 0.1804]}$$

b) $$O(y) - U(y) = \frac{2c}{n+c^2}\sqrt{\frac{y(n-y)}{n} + \frac{c^2}{4}}$$

$$= \frac{2c\sqrt{n}}{n+c^2}\sqrt{\underbrace{\frac{y}{n}\left(1-\frac{y}{n}\right)}_{\leq \frac{1}{4}} + \frac{c^2}{4n}}$$

$$\leq \frac{c\sqrt{n}}{n+c^2}\sqrt{1+c^2} \overset{!}{\leq} 0.04$$

Mit $c = 2.58$ ergibt sich

$$2.58\sqrt{n} \leq \frac{0.04}{\sqrt{1+2.58^2}}\left(n + 2.58^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{n}\right)^2 - \frac{2.58}{0.04}\sqrt{1+2.58^2}\sqrt{n} + 2.58^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \leq 0.0373 \text{ oder } \sqrt{n} \geq 178.43$$

$$\Rightarrow n \geq 31838$$