H19

a) $X \sim t_{20}$; $t_{20;0.95} = \underline{1.7247}$

$X^2 \sim F_{1,20}$; $F_{1,20;0.95} = (t_{20;0.975})^2 = 2.086^2$

$\approx \underline{4.3514}$

b) $\chi^2_{189;0.99} \approx u_{0.99} \cdot \sqrt{2r} + r = \underline{234.2226}$

$\chi^2_{21;0.1} = \underline{13.24}$

$t_{139;0.05} \approx u_{0.05} = -u_{0.95} = \underline{-1.645}$

$F_{4,15;0.95} = 3.0556$

$F_{15,3;0.01} = \dfrac{1}{F_{3,15;0.99}} = (5.4169)^{-1} \approx \underline{0.1846}$

~~G11~~

H20

a) (i) Nach Definition ist $Z_1 = X_1^2 + \ldots + X_{20}^2$ χ^2_{20}-verteilt.

$$P(Z_1 \geq s_1) = 1 - P(Z_1 \leq s_1) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \quad P(Z_1 \leq s_1) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \quad s_1 = \chi^2_{20;0.95} = \underline{31.41}$$

(1)

(ii) $Z_2 = \dfrac{X_{29}^2 / 1}{(X_1^2 + \ldots + X_{28}^2)/28}$ ist $F_{1,28}$-verteilt.

$$P(Z_2/28 \leq s_2) = P(Z_2 \leq 28 s_2) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \quad s_2 = \frac{1}{28} F_{1,28;0.95} = \frac{1}{28}(t_{28;0.975})^2 =$$

$$= \frac{1}{28} \cdot 2.0484^2 \approx \underline{0.1499}$$

(iii) $Z_3 = \frac{1}{\sqrt{100}}(X_1 + \ldots + X_{100})$ ist $N(0,1)$-verteilt.

$$P\left(\frac{1}{100}|X_1 + \ldots + X_{100}| \leq s_3\right) = P(|Z_3| \leq 10 s_3)$$

$$= \Phi(10 s_3) - \Phi(-10 s_3) = 2\Phi(10 s_3) - 1 = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi(10 s_3) = 0.975$$

$$s_3 = \frac{1}{10} u_{0.975} = \underline{0.196}$$

~~H25~~ a) Wir wissen $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2_{(n)} \sim \chi^2_{n-1}$, also

H21

$Z := \frac{20}{21} S^2_{(21)} \sim \chi^2_{20}$, d.h.,

$$P(S^2_{(21)} > 22) = P(Z > \frac{20}{21} \cdot 22) \approx P(Z > 20.95)$$

$$= 1 - F_{\chi^2_{20}}(20.95) \approx 1 - F_{\chi^2_{20}}(\chi^2_{20;0.6})$$

$$= 1 - 0.6 = \underline{0.4}$$

b) $P(S^2_{(15)} > 1.1 \cdot \tilde{S}^2_{(5)})$

$$= P\left(\frac{S^2_{(15)}}{\tilde{S}^2_{(5)}} > 1.1\right)$$

Wegen $\frac{14}{\sigma^2} \cdot S^2_{(15)} \sim \chi^2_{14}$, $\frac{4}{\sigma^2} \tilde{S}^2_{(5)} \sim \chi^2_4$

gilt

$$\frac{S^2_{(15)}}{\tilde{S}^2_{(5)}} = \frac{\frac{1}{14} \cdot \frac{14}{\sigma^2} S^2_{(15)}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\sigma^2} \tilde{S}^2_{(5)}} \sim F_{14,4},$$

also

$$P\left(\frac{S^2_{(15)}}{\tilde{S}^2_{(5)}} > 1.1\right) = 1 - F_{F_{14,4}}(1.1)$$

$$\approx 1 - F_{F_{14,4}}(F_{14,4;0.485})$$

$$= 1 - 0.485 = \underline{0.515}$$

2

~~G12~~
H 22

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der zum Abflug erscheinenden Personen. Nach Aufgabenstellung gilt

$$X \sim B(420, 0.92)$$

a) mit Stetigkeitskorrektur:

$$P(X \le 400) \approx \Phi\left(\frac{400+0.5-420\cdot 0.92}{\sqrt{420\cdot 0.92\cdot 0.08}}\right)$$

$$\approx \Phi(2.54) \approx 0.9945$$

ohne Stetigkeitskorrektur:

$$P(X \le 400) \approx \Phi\left(\frac{400-420\cdot 0.92}{\sqrt{420\cdot 0.92\cdot 0.08}}\right)$$

$$\approx \Phi(2.45) \approx 0.9929$$

b) Sei n die Anzahl der vorgenommenen Platzreservierungen. Dann gilt $X \sim B(n, 0.92)$.

Forderung: $P(X \le 400) \ge 0.95$

Wegen

$$P(X \le 400) \approx \Phi\left(\frac{400+0.5-0.92n}{\sqrt{0.92\cdot 0.08\cdot n}}\right)$$

sollte gelten (näherungsweise):

$$\frac{400.5-0.92n}{\sqrt{0.0736n}} \ge u_{0.95} = 1.645$$

$$\Leftrightarrow \quad 400.5-0.92n \ge \sqrt{0.0736}\cdot 1.645\sqrt{n}$$

Mit $z=\sqrt{n}$ folgt daraus

$$0.92z^2 + 0.4449z - 400.5 \le 0$$

Da die Parabel nach oben geöffnet ist, gilt die Ungleichung für $z_1 \le z \le z_2$ mit

$$z_{1/2} = -\frac{0.4449}{2\cdot 0.92} \mp \sqrt{\left(\frac{0.4449}{2\cdot 0.92}\right)^2 + \frac{400.5}{0.92}} \quad \text{also}$$

$$z_1 \approx -21.1077 \qquad z_2 \approx 20.6241$$

Wegen $z=\sqrt{n} \ge 0$ folgt daraus die Bedingung

$$n \le z_2^2 \approx 425.3526$$

Es dürfen höchstens 425 Platzreservierungen vorgenommen werden.

~~H 22~~

H 23

Annahmen:

- X_i: Anzahl der eingehenden Anrufe in der i-ten Minute, $i = 1, 2, \ldots$
- $X_i \sim Poi(4)$, d.h. $E(X_i) = Var(X_i) = 4$ $i = 1, 2, \ldots$

a) Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist

$X_1 + \ldots + X_{60}$ näherungsweise $N(60 \cdot 4, 60 \cdot 4)$-verteilt.

$$P(X_1 + \ldots + X_{60} \geq 250) = 1 - P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{60} - 240}{\sqrt{240}} \leq \frac{249 - 240}{\sqrt{240}}\right)$$

Stetigkeits-korrektur $\rightarrow$ $\approx 1 - \Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{240}}\right) \approx 1 - \Phi(0.61)$

$$\underline{= 0.2709}$$

(Bei den Umformungen wurde berücksichtigt, dass $X_1 + \ldots + X_{60}$ diskret verteilt ist.)

4

b) Gesucht ist n maximal mit $P(X_1 + \ldots + X_n > 200) \leq 0.05$

$$0.05 \geq P(X_1 + \ldots + X_n > 200) = 1 - P(X_1 + \ldots + X_n \leq 200)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{200.5 - 4n}{\sqrt{4n}}\right)$$

also $\quad 200.5 - 4n \geq u_{0.95}\sqrt{4n} = 3.29\sqrt{n}$

$\Leftrightarrow \quad 4n + 3.29\sqrt{n} \leq 200.5$

$\Leftrightarrow \quad \left(2\sqrt{n} + \frac{3.29}{4}\right)^2 \leq 200.5 + \left(\frac{3.29}{4}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq \frac{1}{2}\left(\left(200.5 + 0.8225^2\right)^{\frac{1}{2}} - 0.8225\right)$

$\Rightarrow \quad \sqrt{n} \leq 6.68$

$\quad n \leq 44.63$

Die Reparatur darf höchstens 44 Minuten dauern.

— H.4.6 —

~~123)~~
H 24

a) Ziehen ohne Zurücklegen: Hypergeometrische Verteilung
Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der defekten Schrauben in der Stichprobe: $X \sim H(50, 500, 10)$.

$$P(X \leqq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{490}{50}}{\binom{500}{50}} + \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{490}{49}}{\binom{500}{50}}$$

$$= \frac{490! \cdot 450!}{500! \cdot 440!} + \frac{10 \cdot 490! \cdot 450! \cdot 50}{500! \cdot 441!}$$

$$= 0{,}34516 + 0{,}39134 = \underline{\underline{0{,}7365}}$$

b) X ist näherungsweise $B(50; \frac{10}{500}) = B(50; 0{,}02)$ - verteilt.

$$P(X \leqq 1) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{49} = 0{,}36417 + 0{,}3716$$
$$= \underline{\underline{0{,}73577}}$$

c) $\lambda = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}02 = 1.$

$$P(X \leqq 1) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} = 2 e^{-1} = 2 \cdot 0{,}36788 = \underline{\underline{0{,}73576}}$$