H 17 Nichtlineare Transformation einer rechteckverteilten Zufallsvariablen

Seien X eine in $[0,\pi]$ rechteckverteilte Zufallsvariable, $U = \cos(X)$ und $V = \sin(X)$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $|U|$.

Für $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} F_{|U|}(x) \;=\; P(|U| \le x) &= P(-x \le \cos(X) \le x) \\ &= P(\arccos(-x) \le X \le \arccos x) \\ &= P(\pi - \arccos x \le X \le \arccos x) \\ &= \frac{\pi - 2\arccos x}{\pi} \;=\; 1 - \frac{2\arccos x}{\pi} \end{aligned}$$

Außerdem gelten $F_{|U|}(x) = 0$ für $x < 0$ und $F_{|U|}(x) = 1$ für $x > 1$.

b) Berechnen Sie $P(|U| \le |V|)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} P(|U| \le |V|) &= P(|\cos X| \le |\sin X|) \\ &= P\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{\pi} \;=\; \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von U.

$$\begin{aligned} E(U) \;=\; E(\cos X) &= \int_{\mathbb{R}} \cos x f_X(x)\, ds \\ &= \int_0^{\pi} \cos x \frac{1}{\pi}\, dx \;=\; 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(U^2) \;=\; E(\cos^2 X) &= \int_{\mathbb{R}} \cos^2 x f_X(x)\, ds \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 x \frac{1}{\pi}\, dx \;=\; \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(U) &= E(U^2) - E(U)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$