Lösungshinweise zur Einf. in die Math. Statistik

für WInf, Inf, BI, ET etc. im SS'03, 6. Übung

G16 a) Geeigneter Test: t-Test, $\alpha = 0.05$

- Nullhypothese: $H_0: \mu = 63 = \mu_0$, $H_1: \mu \neq 63$
- Testgröße (Formel 107): $T(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{S^2_{(n)}}}$
- Realisierung der Testgröße:

$$T(x_1, \dots, x_{26}) = \sqrt{26}\,\frac{63.2 - 63}{\sqrt{0.04}} \approx \underline{5.0990}$$

- Kritischer Bereich:

$$K = \{(x_1, \dots, x_{26}) \mid |T(x_1, \dots, x_{26})| > t_{25;0.975}\}$$

- Entscheidung: Wegen $5.0990 > t_{25;0.975} = 2.0595$ wird H_0 abgelehnt.

b) Gesucht: μ_0, so dass $|T(x_1, \dots, x_{26})| \leq 2.0595$, denn dann liegt Realisierung nicht in K

$$\left|\sqrt{26}\,\frac{63.2 - \mu_0}{\sqrt{0.04}}\right| \leq 2.0595 \iff |63.2 - \mu_0| \leq 0.0808$$

$$\iff \underline{63.1192 \leq \mu_0 \leq 63.2808}$$

c) konkretes Schätzintervall für μ, σ^2 unbekannt:

$$I(x_1, \dots, x_{26}) = \left[\bar{x} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{s^2/n}\,;\ \bar{x} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{s^2/n}\right]$$

$$\approx \underline{[63.1192\,;\ 63.2808]}$$

gleiches Intervall wie in b), vgl. Fazit

d) Geeigneter Test: χ^2-Streuungstest, $\alpha = 0.1$

- $H_0: \sigma^2 \leq 0.03$ $\quad H_1: \sigma^2 > 0.03$ (einseitig!)
- Testgröße (Formel 109): $T(X_1, \dots, X_n) = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2}\, S^2_{(n)}$
- Realisierung der Testgröße:

$$T(x_1, \dots, x_{26}) = \frac{25}{0.03} \cdot 0.04 = \underline{33\tfrac{1}{3}}$$

- Kritischer Bereich:

$$K = \{(x_1, \dots, x_{26}) \mid T(x_1, \dots, x_{26}) > \chi^2_{25;0.9}\}$$

- Entscheidung: Wegen $33\frac{1}{3} < \chi^2_{25;0.9} = 34.382$ wird nichts gegen H_0 eingewendet.

G17 a) Geeigneter Test: F-Test, $\alpha = 0.1$

- $H_0: \sigma_A = \sigma_B$ $\quad H_1: \sigma_A \neq \sigma_B$
- Testgröße (Formel 110): $T(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n) = \dfrac{S^2_{(m)}}{\tilde{S}^2_{(n)}}$
- Realisierung der Testgröße:

$$T(x_1, \dots, x_{15}, y_1, \dots, y_{17}) = \frac{3.8^2}{5.1^2} \approx \underline{0.5552}$$

- Kritischer Bereich:

$$K = \{(x_1, \dots, x_{15}, y_1, \dots, y_{17}) \mid T(x_1, \dots, x_{15}, y_1, \dots, y_{17}) < F_{14,16;0.05}$$
$$\text{oder } T(x_1, \dots, x_{15}, y_1, \dots, y_{17}) > F_{14,16;0.95}\}$$

- Entscheidung: Wegen $0.4091 \leq 0.5552 \leq 2.3733$ liegt die Beobachtung nicht in K, d.h. H_0 wird nicht verworfen.

b) Geeigneter Test: Zwei-Stichproben-t-Test $\alpha = 0.05$

- $H_0: \mu_A = \mu_B \qquad H_1: \mu_A \neq \mu_B$
- Testgröße (Formel 108):

$$T(X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_n) = \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \cdot \frac{\overline{Y}_{(n)} - \overline{X}_{(m)}}{\sqrt{(m-1)S^2_{(m)} + (n-1)\tilde{S}^2_{(n)}}}$$

- Realisierung der Testgröße:

$$T(x_1,\dots,x_{15},y_1,\dots,y_{17}) = \sqrt{\frac{15\cdot 17\cdot 30}{32}} \cdot \frac{11.5-9.2}{\sqrt{14\cdot 3.8^2 + 16\cdot 5.1^2}}$$

$$\approx \underline{1.4301}$$

- Kritischer Bereich: $K = \{(x_1,\dots,x_{15},y_1,\dots,y_{17}) \mid |T(\dots)| > t_{30;0.975}\}$
- Entscheidung: Wegen $1.4301 \leq t_{30;0.975} = 2.0423$ <u>wird H_0 nicht abgelehnt</u>.

G 18 Test: <u>χ^2-Anpassungstest</u> $\alpha = 0.05$

Es gibt $r = 10$ Klassen. Da es sich um eine $R(0,1)$-Verteilung handelt, gilt $p_i^0 = 0.1$ für $i = 1,\dots,10$.

- Nullhypothese: $H_0: (p_1,\dots,p_{10}) = (\frac{1}{10},\dots,\frac{1}{10})$
- Testgröße (Formel 111):

$$Q(Y_1,\dots,Y_r; p_1^0,\dots,p_r^0) = \sum_{j=1}^{r} \frac{(Y_j - np_j^0)^2}{np_j^0}$$

bzw. äquivalent dazu (Formel 112):

$$Q(Y_1,\dots,Y_r; p_1^0,\dots,p_r^0) = \sum_{j=1}^{r} \frac{Y_j^2}{np_j^0} - n$$

- Realisierung der Testgröße:

$$Q(y_1,\dots,y_{10}; p_1^0,\dots,p_{10}^0) = \sum_{j=1}^{10} \frac{y_j^2}{1000\cdot 0.1} - 1000 = \underline{31.32}$$

- Kritischer Bereich: $K = \{(y_1,\dots,y_{10}) \mid Q > \chi^2_{9;0.95}\}$
- Entscheidung: Wegen $31.32 > \chi^2_{9;0.95} = 16.92$ <u>wird H_0 abgelehnt.</u>