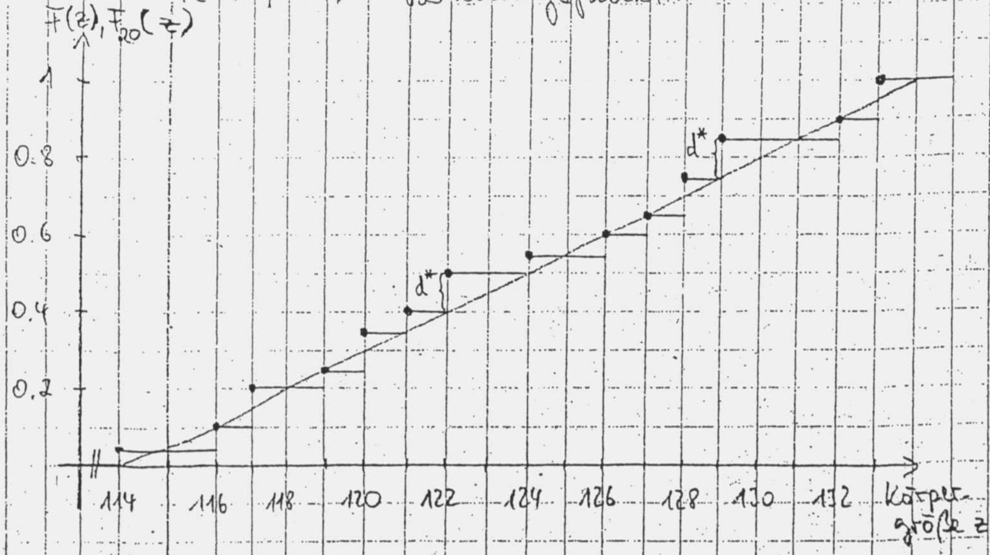
G 13 a), b) empirische Verteilungsfunktion und
$R(114, 134)$ - Verteilungsfunktion $F(z)$



Aus der Skizze liest man ab:

$$d^* = \sup_{z \in \mathbb{R}} |F_{20}(z; x_1, \dots, x_{20}) - F(z)| = \underline{0.1}$$

c) Setze $D_n(X_1, \dots, X_{20}) = \sup_{z \in \mathbb{R}} |F_n(z; x_1, \dots, x_n) - F(z)|$

Satz 2.92 liefert:

$$P(D_n(X_1, \dots, X_n) > d) = P(\sqrt{n}\, D_n(X_1, \dots, X_n) > \sqrt{n}\, d)$$

$$\approx 1 - K(\sqrt{n}\, d)$$

Wg. $K(1.36) = 0.95$ gilt

$$P\left(D_n(X_1, \dots, X_n) > \frac{1.36}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.05$$

(1)

Wir lehnen die Vermutung ab, falls gilt

$$d^* > \frac{1.36}{\sqrt{n}},$$

weil dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Abweichungen auftreten, die noch größer sind als $1.36/\sqrt{n}$, nur 5% groß ist (was dem Signifikanzniveau der Aufgabe entspricht).
[Diese Wahrscheinlichkeit wird unter der Annahme berechnet, dass die Vermutung stimmt.]

Wir lehnen also die Vermutung ab, falls

$$\underline{d^*} > \frac{1.36}{\sqrt{20}} = \underline{0.304}$$

Wg. $d^* = 0.1 < 0.304$ wird die Vermutung nicht abgelehnt.

(vgl. S. 104/105 in Lehn/Wegmann)

G14 a) Ein Schätzer T_n ist erwartungstreu für $\tau(\theta)$, falls $E_\theta(T_n(X_1,\dots,X_n)) = \tau(\theta)$ $\forall\theta$ gilt

$$E_\theta(\overline{X}_{(n)}) = E_\theta\left(\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)\right) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot E_\theta(X_1)$$

$$= \frac{\theta-1+\theta+1}{2} = \underline{\theta}$$

b) $$\mathrm{Var}_\theta(\overline{X}_{(n)}) = \mathrm{Var}_\theta\left(\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot \mathrm{Var}_\theta(X_1)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{(\theta+1-(\theta-1))^2}{12} = \underline{\frac{1}{3n}}$$

mittlerer quadratischer Fehler:

$$E_\theta([T_n-\tau(\theta)]^2) = E_\theta([T_n - E_\theta(T_n)]^2)$$

$$= \mathrm{Var}_\theta(T_n) = \frac{1}{3n}$$

c) $T_1, T_2, \dots$ ist eine Folge von erwartungstreuen Schätzern mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\theta(T_n(X_1,\dots,X_n))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = 0 \qquad \forall\theta$$

Mit Satz 3.10 folgt, dass die Schätzerfolge konsistent ist.

G15

a) Eine Dichte für die gegebene Verteilung ist

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{für } x \geq \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

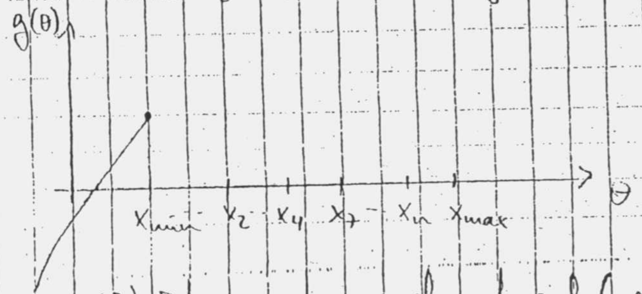
Für Realisierungen $x_1, \dots, x_n$ der ZVas $X_1, \dots, X_n$ ist

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\theta)} & \text{für } \theta \leq x_i \ \forall i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die zu maximierende Likelihood-Funktion.

$$g(\theta) = \ln L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^n (x_i - \theta) & \text{für } \theta \leq x_i \ \forall i \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $\theta \leq x_i \ \forall i$ ist also $g(\theta) = n(\theta - \bar{x})$. Skizze:



g ist linear mit Steigung n bis $x_{min} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$

$g(\theta)$ ist monoton wachsend auf $(-\infty, x_{min}]$ und fällt unter allen Schranken $(-\infty)$ auf (x_{min}, ∞).

Deshalb ist

$$\underline{T_n(X_1, \dots, X_n) = \min\{X_1, \dots, X_n\}}$$

b) $T_n(X_1, \dots, X_n) = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

Die Verteilungsfunktion $G_\theta(x)$ von T_n ist nach G 9 gegeben durch

$$G_\theta(x) = 1 - (1 - F_\theta(x))^n = \begin{cases} 1 - e^{-n(x-\theta)} & \text{für } x \geq \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $$E_\theta(T_n) = \int_0^\infty (1 - G_\theta(x))\,dx = \int_0^\theta 1\,dx + \int_\theta^\infty e^{-n(x-\theta)}\,dx$$

$$= \theta + \left[-\frac{1}{n} e^{-n(x-\theta)}\right]_\theta^\infty = \underline{\theta + \frac{1}{n}}$$

Bias: $E_\theta(T_n) - \theta = \underline{\frac{1}{n}}$

alternativ mit dem Hinweis:

$Y_n = T_n - \theta \qquad P(Y_n \leq x) = P(T_n \leq x + \theta) = F_\theta(x+\theta)$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-nx} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Y_n ist also exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = n$

$\Rightarrow E_\theta(Y_n) = \frac{1}{n} \quad Var_\theta(Y_n) = \frac{1}{n^2}$

Damit: $E_\theta(T_n) = E_\theta(Y_n + \theta) = \frac{1}{n} + \theta$

$$Var_\theta(T_n) = Var_\theta(Y_n + \theta) = Var_\theta(Y_n) = \frac{1}{n^2}$$

mittlerer quadratischer Fehler:

$$E_\theta((T_n - \theta)^2) = (E_\theta(T_n) - \theta)^2 + Var_\theta(T_n) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}$$

d) Wegen $\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \theta\right) = \theta$

ist $T_1, T_2, \dots$ asymptotisch erwartungstreu für θ