G7

a) (i) $P(X>1) = 1-P(X\le 1) = 1-P\Big(\underbrace{\frac{X-3}{\sqrt{4}}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{1-3}{\sqrt{4}}\Big)$

$= 1-\Phi\left(\frac{-2}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(1) = \underline{0.841}$

(ii) $P(0.5 \le X \le 2.5) = P(X\le 2.5) - P(X\le 0.5)$

$= \Phi\left(\frac{2.5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0.5-3}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{4}\right)$

$= 1-\Phi\left(\frac{1}{4}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 0.894-0.599 = \underline{0.295}$

(iii) $P(X<-1) = \Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right) = \Phi(-2)$

$= 1-\Phi(2) = \underline{0.023}$

b) Sei m der Median von X. Dann muss gelten:

$P(X\le m) = 0.5 \iff \Phi\left(\frac{m-3}{2}\right) = 0.5$

$\iff \frac{m-3}{2} = u_{0.5} = 0$

$\iff \underline{m=3}$

Der Median ist also 3, d.h. gleich dem Erwartungswert von X. Vergleiche dazu auch die Bemerkung über symmetrisch verteilte Zufallsvariablen auf S. 63 (Le/W).

c) $P(Y\le 0) = P(2X-1\le 0) = P(X\le \frac{1}{2})$

$= \Phi\left(\frac{0.5-3}{2}\right) = 1-\Phi\left(\frac{5}{4}\right) = \underline{0.106}$

Sei q das 0.9-Quantil von Y. Dann muss gelten:

$P(Y\le q) = 0.9 \iff P\left(X \le \frac{q+1}{2}\right) = 0.9$

$\iff \Phi\left(\frac{\frac{q+1}{2}-3}{2}\right) = 0.9$

$\iff \left(\frac{q+1}{2}-3\right)/2 = u_{0.9} = 1.28$

$\iff \underline{q = 10.12}$

d) Als Linearkombination von normalverteilten Zufallsvariablen ist $3X-5W+10$ wieder normalverteilt.

Es gelten

$E(3X-5W+10) = 3EX - 5EW + 10$
$= 9 - 20 + 10 = -1$

$Var(3X-5W+10) = 3^2\, Var X + (-5)^2\, Var W$
$= 9\cdot 4 + 25\cdot 2$
$= 86$

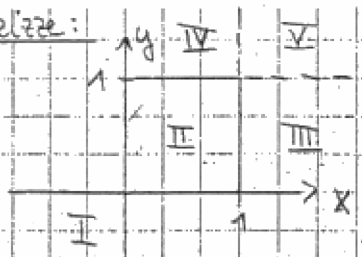
und somit

$3X-5W+10 \overset{D}{=} N(-1, 86)$.

$\boxed{\text{K01\_020}}$

K01_021

G8 Skizze:



Über dem schraffierten Bereich nimmt $f(s,t)$ den Wert 1, sonst den Wert 0 an.

a) gesucht: $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt\,ds$

Fall I: $x < 0$ oder $y < 0$

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\,dt\,ds = \underline{0}$

Fall II: $0 \le x, y \le 1$

$F(x,y) = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 1\,dt\,ds = \int_{0}^{x} y\,ds = \underline{x \cdot y}$

Fall III: $x > 1$ und $0 \le y \le 1$

$F(x,y) = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y} 1\,dt\,ds = \int_{0}^{1} y\,ds = \underline{y}$

Fall $\boxed{IV}$: $0 \le x \le 1$ und $y > 1$

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^1 1 \, dt \, ds = \int_0^x 1 \, ds = \underline{x}$$

Fall $\boxed{V}$: $x > 1$ und $y > 1$

$$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dt \, ds = \underline{1}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } y < 0 \\ xy & \text{für } 0 \le x, y \le 1 \\ y & \text{für } x > 1 \text{ und } 0 \le y \le 1 \\ x & \text{für } 0 \le x \le 1 \text{ und } y > 1 \\ 1 & x > 1 \text{ und } y > 1 \end{cases}$$

b) Randverteilungen:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Analog für $F_Y(y)$. X und Y sind $R(0,1)$-verteilt.

Dichte:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) \, dt = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog für $f_Y(y)$.

c) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$$E(X \cdot Y) = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x \, dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{0} \qquad \text{da } E(X) = \frac{0+1}{2}$$

vgl. Bsp. 2.33 (Le/We)

$$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \underline{0}$$

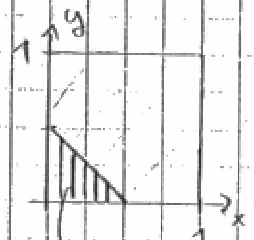
d) Nach §| 2.67 (Le/We) ergibt sich:

$$P(X+Y \le \tfrac{1}{2}) = \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le \frac{1}{2}\}} 1 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\max\{\frac{1}{2}-x, 0\}} 1 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2 - x} 1 \, dy \, dx + \underbrace{\int_{1/2}^1 \int_0^0 1 \, dy \, dx}_{=0}$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{2} - x\right) dx = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} = \underline{\tfrac{1}{8}}$$



$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le \frac{1}{2}\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0\}$

Bemerkung: Aufgabe 68 kann man natürlich auch über elementargeometrische Berechnung von Volumina lösen.

b) $K_1, \dots, K_n$ sind $Ex(\lambda)$-verteilt;

L sei die Zufallsvariable, die die Lebensdauer des gesamten Systems beschreibt

gesucht: $F_L(x) = P(L \leq x)$

(i) $L = \min\{K_1, \dots, K_n\}$

Wegen

$$F_{K_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

gilt:

$$F_L(x) \overset{a)}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{K_i}(x)) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{-n\lambda x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Für $n = 4$ und $\lambda = 0.25$ ergibt sich

$$P(L > 5) = 1 - F_L(5) = e^{-4 \cdot 0.25 \cdot 5} = \underline{0.0067}$$

(ii) $L = \max\{K_1, \dots, K_n\}$

In diesem Fall gilt:

$$F_L(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{K_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$P(L > 5) = 1 - F_L(5) = 1 - (1 - e^{-0.25 \cdot 5})^4 = \underline{0.2901}$$

$$= P(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y)$$

$$\overset{\text{wg. Unabhängigkeit von } X_1, \dots, X_n}{=} P(X_1 \leq y) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_i(y)$$

b) $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq z)$

$$= 1 - P(X_1 > z, \dots, X_n > z)$$

$$\overset{\text{Unabh.}}{=} 1 - P(X_1 > z) \cdot \ldots \cdot P(X_n > z)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(z))$$

K01-022