Lösungsvorschlag

G4 Beim beschriebenen Zufallsexperiment handelt es sich um ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung. Daher müssen wir mit Binomialkoeffizienten arbeiten.

Wir definieren folgende Ereignisse:

A_i: „Andreas hat genau i Buben" , $0 \le i \le 4$
B_i: „Bettina " " " " , $0 \le i \le 4$
C_i: „Claudia " " " " , $0 \le i \le 4$
D_i: „Im Skat liegen " " " , $0 \le i \le 2$

a) $P(D_2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{28}{0}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{6 \cdot 1}{496} = \underline{0.0121}$

b) $P(C_1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{4 \cdot 6906900}{64512240} = \underline{0.4283}$

c) Sei B: „Bettina hat mindestens 2 Buben"

$P(B) = P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = 1 - P(B_0) - \underbrace{P(B_1)}_{= P(C_1)}$

$= 1 - \dfrac{\binom{4}{0}\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}} - \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} = \underline{0.3683}$

d) $P(A_1 | C_1) = \dfrac{P(A_1 \cap C_1)}{P(C_1)} = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}\binom{3}{1}\binom{19}{9}}{\binom{32}{10}\binom{22}{10}} \Big/ \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}}$

$= \dfrac{\binom{3}{1}\binom{19}{9}}{\binom{22}{10}} = \dfrac{277134}{646646} = \dfrac{3}{7} = \underline{0.4286}$

$P(A_1 | C_1)$ muss man nicht zwingend über die Definition der bedingten Wkt. berechnen. Man kann sie auch direkt hinschreiben, wenn man bedenkt dass unter C_1 nur noch 3 Buben und 19 restl. Karten für A bleiben.

e) Sei E: „Jede(r) des Spieles hat mind. 1 Buben"

$P(E) = P(A_1 \cap B_1 \cap C_2) + \binom{3}{1} P(A_2 \cap B_1 \cap C_1)$

$= \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}\binom{3}{1}\binom{19}{9}\binom{2}{1}\binom{10}{9}}{\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}} + \binom{3}{1}\dfrac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}\binom{2}{1}\binom{20}{9}\binom{1}{1}\binom{11}{9}}{\binom{32}{10}\binom{22}{10}\binom{12}{10}}$

$(\approx 0.0556 + 3 \cdot 0.1251) \approx \underline{0.4310}$

G5 Wir definieren folgende Ereignisse:

A: „Unter den Kindern der Familie sind genau 2 Jungen"
B_k: „die Familie hat genau k Kinder" $k = 0, 1, 2, \ldots$

Es gilt:

$P(B_k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$P(A | B_k) = \binom{k}{2}\left(\frac{13}{25}\right)^2 \left(\frac{12}{25}\right)^{k-2}$ für $k \ge 2$, sonst $P(A|B_k) =$

(Binomialverteilung mit $n = k$, $p = \frac{13}{25}$)

a) Mit der Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit folgt:

$P(A) = \sum\limits_{k \ge 2} P(B_k)\, P(A | B_k)$

$= \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \binom{k}{2}\left(\frac{13}{25}\right)^2\left(\frac{12}{25}\right)^{k-2}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{13}{25}\right)^2 \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{12}{25}\right)^{k-2}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{13}{25}\right)^2 \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{8}{25}\right)^{k-2} k(k-1)$

$= \frac{2}{27}\left(\frac{13}{25}\right)^2 \dfrac{2}{\left(\frac{17}{25}\right)^3} = \dfrac{4 \cdot 13^2 \cdot 25}{27 \cdot 17^3} = \underline{0{,}1274}$

b) gesucht ist $P(B_3 \mid A)$.

Mit der Formel von Bayes erhält man:

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)}$$

$$= \frac{\binom{3}{2}\left(\frac{13}{25}\right)^2 \cdot \frac{12}{25} \quad \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3}{0.1274}$$

$$= \underline{0.3019}$$

G6 a) $P(X=k) = \left(\frac{34}{37}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{37} \qquad k \geq 1$

also ist X geometrisch verteilt mit $p = \frac{3}{37}$

$$P(X>4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \frac{3}{37}\left[1 + \frac{34}{37} + \left(\frac{34}{37}\right)^2 + \left(\frac{34}{37}\right)^3\right]$$

$$= \underline{0.7130}$$

Alternative: $P(X>4) = \left(\frac{34}{37}\right)^4$ d.h. keine Unglückszahl in den ersten 4 Runden ($\hat{=}$ mind. 5 Runden warten)

b) X beschreibe die Anzahl der Abfragen der Internetseite innerhalb einer Minute

$X \sim Poi(\lambda)$; gegeben: $P(X=0) = 0.1$

$$P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \stackrel{!}{=} 0.1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\ln 0.1 = \ln 10$$

$$P(X=1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \ln 10 \cdot 0.1 \approx \underline{0.2303}$$

$$P(X>2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right]$$

$$= 1 - 0.1\left[1 + \ln 10 + \frac{(\ln 10)^2}{2}\right] \approx \underline{0.4046}$$