Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 03.07.2006

Einführung in die Statistik

11. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G31 (Tests bei Normalverteilungsannahmen) Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen. Es ergaben sich folgende Messwerte (in m):

998.0 1001.0 1003.0 1000.5 999.0

997.5 1000.0 999.5 996.0 998.5

Unter der Annahme, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilten Zufallsvariablen sind, sollen zum Niveau 0.05 die Hypothesen getestet werden, dass

a) das Gerät im Mittel die korrekte Entfernung angibt,

b) die Varianz σ^2 den Wert $\sigma_0^2 = 4[m^2]$, den herkömmliche Geräte aufweisen, nicht unterschreitet.

Aufgabe G32 (Tests bei Normalverteilungsannahmen) In einer Molkerei wurden bei zwei Maschinen, die Milch in Milchtüten abfüllen, die Füllmengen von 21 bzw. 9 Milchtüten bestimmt. Dabei erhielt man Messwerte $x_1, \ldots, x_{21}$ und $y_1, \ldots, y_9$ (in ml) mit den empirischen Mittelwerten $\overline{x} = 501$ bzw. $\overline{y} = 503$ und den empirischen Varianzen $s^2_{(21)} = 3.24$ bzw. $s^2_{(9)} = 3.61$. Unter der Annahme, dass die angegebenen Messwerte eine Realisierung unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{21}, Y_1, \ldots, Y_9$ sind, wobei $X_1, \ldots, X_{21}$ identisch $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ - und $Y_1, \ldots, Y_9$ identisch $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ - verteilt sind, testen Sie

a) unter der Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ durch Anwendung eines geeigneten Testverfahrens zum Niveau 0.05 die Hypothese $\mu_1 \geq \mu_2$ gegen die Alternative $\mu_1 < \mu_2$.

b) durch Anwendung eines geeigneten Testverfahrens zum Niveau 0.1, ob aufgrund des angegebenen Datenmaterials die unter a) gemachte Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gegen $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ zu verwerfen ist.

Eventuell benötigte Quantile : $F_{20;8;0.95} = 3.1502$ $\quad F_{8;20;0.95} = 2.4471$

Aufgabe G33 Ein Angelverein möchte den Bestand θ an Fischen in einem See schätzen. Hierzu werden m Fische aus dem See gefangen, diese mit einer Markierung versehen und anschliessend wieder in dem See ausgesetzt. Nach einigen Tagen werden nun n Fische aus dem See gefangen und die Anzahl i der markierten Fische unter den n gefangen gezählt. Geben Sie einen Schätzer für den gesamten Bestand θ an Fischen in dem See mit Hilfe einer Maximum-Likelihood Methode an.
Hinweis: Betrachten Sie $P_\theta(X = i)$ und suchen Sie das Maximum bzgl. θ.

Hausübungen

Aufgabe H31 (Länge von Konfidenzintervallen) Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch $N(\mu, 9)$-verteilt, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ der unbekannte Erwartungswert ist.

a) Wie groß muss n mindestens gewählt werden, damit bei dem üblichen Konfidenzschätzverfahren für den Parameter μ zum Konfidenzniveau 0.95 ein konkretes Schätzintervall entsteht, dessen Länge nicht größer als 1.2 ist?

b) Welches Konfidenzniveau besitzt das übliche Konfidenzschätzverfahren für den Parameter μ, wenn bei $n = 300$ konkrete Schätzintervalle der Länge 0.5 entstehen?

c) Welche Länge besitzt ein konkretes Schätzintervall, das bei $n = 200$ mit dem üblichen Konfidenzschätzverfahren zum Niveau 0.9 für das Schätzen des Parameters μ entsteht?

Aufgabe H32 (Tests bei Normalverteilungsannahmen) In einem Betrieb werden Schrauben hergestellt, deren Länge [in mm] sich durch eine unabhängige $N(\mu, 0.05)$-verteilte Zufallsvariablen beschreiben lässt. Bei einer Stichprobe vom Umfang 20 ergab sich $\bar{x} = 52.1$.

a) Überprüfen Sie mit dem Gauß-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese $H_0 : \mu = 52$.

b) Geben Sie alle $\mu_0 \in \mathbb{R}$ an, für die die Nullhypothese mit obigen Daten bei Verwendung des Gauß-Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$ nicht verworfen wird.

c) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten ein konkretes Schätzintervall für μ (bei bekannter Varianz $\sigma_0^2 = 0.05$) zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$. Stellen Sie einen Vergleich mit Ihrem Resultat aus Aufgabenteil b) an.

Fazit aus b) und c):
Ist $I = I(x_1, \ldots, x_{20})$ das konkrete Schätzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ aus Aufbagenteil c), so gilt: Die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ wird beim Gauß-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ genau dann verworfen, wenn $\mu_0 \notin I$ gilt.

Aufgabe H33 (OC-Funktion, Fehler 2. Art) Ein Hersteller von Computerchips möchte den Anteil θ von defekten Chips in der Produktion überprüfen lassen ($0 \leq \theta \leq 1$). Um die Hypothese $H_0 : \theta \leq 0.01$ zu überprüfen, wurde folgender Test vorgeschlagen:
Man entnimmt der laufenden Produktion eine Stichprobe von 30 Chips. Falls darunter mehr als 1 defekter Chip ist, wird H_0 verworfen, ansonsten wird nichts gegen die Hypothese eingewendet.

a) Berechnen Sie die OC-Funktion und die Gütefunktion des Tests.

b) Zeigen Sie, dass der vorgeschlagene Test ein Test zum Signifikanzniveau 0.05 ist.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird H_0 nicht verworfen, wenn $\theta = 0.05$ gilt, d.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?