Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 26.06.2006

Einführung in die Statistik

10. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G28

Für ein $\theta \in \mathbb{R}$ sei die Dichte einer Zufallsvariablen X gegeben durch

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\theta - \ln x}{\sigma}\right)^2\right) & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y = \ln X$.

b) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch wie X verteilt. Bestimmen Sie für den Parameter θ einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$.

c) Zeigen Sie, dass $\hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ erwartungstreu und die zugehörige Schätzerfolge konsistent für den Parameter θ sind.

Aufgabe G29

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch Poisson-verteilt mit dem unbekannten Parameter $\lambda > 0$.

a) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_n$ für λ.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom wahren Parameter λ den Erwartungswert und die Varianz der Maximum-Likelihood-Schätzvariablen $\hat{\lambda}_n(X_1, \ldots, X_n)$.

c) Berechnen Sie im Falle $n = 50$ und $\lambda = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert des Maximum-Likelihood-Schätzers $\hat{\lambda}_n$ um mindestens 0.5 vom wahren Parameter abweicht. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit soll näherungsweise mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes bestimmt werden.

d) Zeigen Sie, dass die Folge $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots$ der Maximum-Likelihood-Schätzer konsistent ist.

Aufgabe G30

Bei der Produktion von Sicherungen entstehen mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p defekte Stücke. Um Aufschluss über die Wahrscheinlichkeit p zu bekommen, werden der laufenden Produktion n Sicherungen entnommen, die auf Fehlerhaftigkeit überprüft werden.

a) Bestimmen Sie unter geeigneten Annahmen für $n = 500$ ein "approximatives" Konfidenzintervall für p zum Konfidenzniveau 0.99, wenn 25 der 500 überprüften Sicherungen defekt sind.

b) Bestimmen Sie ein n so, dass das in a) verwendete Konfidenzschätzverfahren zum Niveau 0.99 Schätzintervalle liefert, deren Längen nicht größer als 0.05 sind.

Hausübungen

Aufgabe H28

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit der Dichte

$$f_{\theta_1,\theta_2}(x) = \begin{cases} 1/\theta_2 \cdot e^{-(x-\theta_1)/\theta_2} & \text{falls } x \geq \theta_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\theta_1 \in \mathbb{R}$ und $\theta_2 \in (0, \infty)$ unbekannt sind.

(a) Bestimmen Sie ML-Schätzer $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ für θ_1 bzw. θ_2.

(b) Zeigen Sie, dass beide Schätzer asymptotisch erwartungstreu sind.

Aufgabe H29

In einer Stadt liegen für 161 Jahre Niederschlagsmessungen im Monat April vor. Die Meßreihe $x_1, x_2, \ldots, x_{161}$($x_i$ = Niederschlagshöhe in mm im i-ten Jahr) hat das arithmetische Mittel $\bar{x} = 53.68$ und die empirische Streuung $s = 6.13$. Es wird angenommen, daß die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_{161}$ eine Realisierung von 161 unabhängigen, identisch $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilten Zufallsvariablen sind. Bestimmen Sie mit Konfidenzschätzverfahren zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ je ein konkretes Schätzintervall

a) für μ

b) für σ^2

c) für μ unter der Voraussetzung $\sigma^2 = 6.13^2$

Eventuell benötigte Quantile : $t_{160;0.975} = 1.9749$ $\quad \chi^2_{160;0.025} = 126.866$ $\quad \chi^2_{160;0.975} = 196.918$

Aufgabe H30

Für die unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gelte:

$$E(X_k) = \mu_0 \quad \text{und} \quad Var(X_k) = k \cdot \sigma^2 \,, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dabei sei μ_0 bekannt und σ^2 unbekannt.

a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall $I(X_1, \ldots, X_n)$ für σ^2 zum Niveau $1 - \alpha$.
HINWEIS : Überlegen Sie zunächst, wie die Summe der quadrierten Standardisierungen zu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ verteilt ist.

b) Berechnen Sie das konkrete Schätzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0.9$ für die Messreihe

$$12.5 \quad 14 \quad 17 \quad 13 \quad 16 \quad 11,$$

wenn $\mu_0 = 15$ gilt.