Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2006 19.06.2006

Einführung in die Statistik

9. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G25 (Erwartungstreue, Konsistenz)
Für ein $\theta > 0$ sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unabhängige Folge $R(0, \theta)$ - verteilter Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{2}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Bestimmen Sie die Varianz von T_n.

c) Zeigen Sie, dass $T_1, T_2, \ldots$ eine konsistente Schätzerfolge für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

d) Sei

$$\tilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{4}{n^2} \cdot (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2 = (T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n))^2$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{T}_n$ nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$ ist.

e) Modifizieren Sie $\tilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ geeignet, so dass sich ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$ ergibt.

f) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für $\tau(\theta) = Var_\theta(X_i)$ an.
Hinweis : Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil e).

Aufgabe G26
$X_1, \ldots, X_m$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ seien zwei unabhängige Stichproben mit demselben Erwartungswert θ und bekannten Varianzen σ_1^2 bzw. σ_2^2. Betrachten Sie die folgende Klasse von Schätzern für den Parameter θ:

$$T^{(c)} = c \cdot \overline{X}_{(m)} + (1 - c) \cdot \overline{Y}_{(n)}, \qquad 0 \leq c \leq 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass jeder Schätzer dieser Klasse erwartungstreu ist.

(b) Welchen dieser Schätzer würden Sie verwenden?

Aufgabe G27 (Schätzung des Modalwerts)
Nimmt die Dichte f einer stetig verteilten Zufallsvariablen X genau ein Maximum an, so heißt die Maximalstelle Modalwert von X. Sie wird mit $Mod(X)$ bezeichnet. Für $\theta > 0$ sei die Zufallsvariable X stetig verteilt mit einer Dichte f_θ, wobei $c(\theta)$ eine positive Konstante ist:

$$f_\theta(t) = \begin{cases} c(\theta) \cdot t \cdot (t-\theta)^2 & \text{für} \quad 0 \le t \le \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $c(\theta)$.

b) Zeigen Sie, dass f_θ genau ein Maximum annimmt und berechnen Sie den Modalwert $Mod_\theta(X)$.

c) Bestimmen Sie $E_\theta(X)$ und $Var_\theta(X)$.

d) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch wie X verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{5}{6n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

erwartungstreu für $\tau(\theta) = Mod_\theta(X)$ ist.

e) Ist die Schätzerfolge $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für τ ?

Hausübungen

Aufgabe H25
$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2x/\theta^2 & \text{falls } 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei der Paramter $\theta > 0$ unbekannt ist.

(a) Berechnen Sie $E_\theta(X_1)$ und $Var_\theta(X_1)$.

(b) Zeigen Sie, dass der Schätzer $T_n = \overline{X}_{(n)}$ für θ nicht erwartungstreu ist. Ist er asymptotisch erwartungstreu?

(c) Modifizieren Sie T_n in geeigneter Weise, so dass Sie einen für θ erwartungstreuen Schätzer $\widetilde{T}_n$ erhalten.

(d) Überprüfen Sie den Schätzer $\widetilde{T}_n$ auf Konsistenz.

Aufgabe H26 (Bias)
Für ein $\theta > 0$ und $k > 1$ sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen, identisch $R(\theta, k\theta)$–verteilten Zufallsvariablen.

(a) Bestimmen Sie den Bias des folgenden Schätzers für $\tau(\theta) = \theta^2$

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{4}{(k+1)^2} \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \Big)^2 .$$

(b) Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$ an.

Aufgabe H27 (Quadratische Abweichung)
Wir führen die Aufgabe G24 fort.

a) Zeigen Sie, dass
$$\tilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{5}{3n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i$$
ebenfalls ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = Mod_\theta(X)$ ist.

b) Ist die Schätzerfolge $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots$ ebenfalls konsistent für τ ?

c) Welcher der beiden Schätzer ist vorzuziehen ? Begründen Sie Ihre Antwort.

HINWEIS: $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$