



Einführung in die Statistik

8. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G22 (Grenzwertsätze)

In die Lieferung von 450 Speichermedien für den PC an einen Computerhändler sind durch einen Fehler beim Verpacken 9 Speichermedien mit der doppelten Kapazität geraten. Berechnen Sie unter geeigneten Annahmen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Käufer beim Kauf von 40 zufällig (ohne Zurücklegen) herausgegriffenen Speichermedien mindestens zwei Speichermedien mit doppelter Kapazität erhält

- exakt,
- durch Anwendung der Binomialapproximation der hypergeometrischen Verteilung,
- durch näherungsweise Berechnung der Binomialwahrscheinlichkeiten in b) mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes.

Aufgabe G23 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen X, Y und Z seien unabhängig. X sei $R(10, 14)$ -verteilt, Y sei $Ex(2)$ -verteilt und Z sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 6$. Sei $U = X \cdot Y - Z$. Die Zufallsvariablen U_1, U_2, \dots seien unabhängig und wie U verteilt. Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_1 + \dots + U_n \leq \sqrt{n}).$$

Aufgabe G24 (Kolmogoroff-Smirnov-Test)

Die Messreihe x_1, \dots, x_n gebe die Lebensdauer von 50 gleichartigen Geräten [in Jahren] wieder, wobei kein Messwert mehrfach vorkommt. Es soll überprüft werden, ob die Lebensdauer als exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$ angenommen werden kann. Prüfen Sie diese Hypothese mit dem Kolmogoroff-Smirnov-Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ aufgrund der Beobachtung, dass das Supremum der Abweichungen zwischen der zur Messreihe x_1, \dots, x_n gehörenden empirischen Verteilungsfunktion $F_{50}(\cdot; x_1, \dots, x_{50})$ und der Verteilungsfunktion der in Frage stehenden Exponentialverteilung beim 28. Wert $x_{(28)} = 2.725$ der geordneten Messreihe auftritt.

Für welche Werte von α wird man nichts gegen die Nullhypothese einwenden?

Hinweis: Es ist $K(1.4425) = 0.9688$.

Hausübungen

Aufgabe H22

Bei der Produktion von Kleidungsstücken weiß man, dass im Mittel 8% der Produktion nur als Waren zweiter Wahl abgesetzt werden können, da ein Teil der verwendeten Stoffe bei der Produktion beschädigt wird. Ein Warenhaus erklärt sich auf Grund seiner Lagerkapazitäten bereit, maximal 400 Stück fehlerfreier Ware abzunehmen. Um die Bestellung des Warenhauses erfüllen zu können, werden zur Sicherheit 420 Stück produziert.

- Berechnen Sie mittels des Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass alle fehlerfreien Kleidungsstücke, die produziert wurden, vom Warenhaus auch abgenommen werden. Nehmen Sie dabei an, dass die Fehler bei der Produktion der einzelnen Kleidungsstücke unabhängig auftreten.
- Wieviele Kleidungsstücke dürfen höchstens produziert werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit 95% beträgt? Geben Sie die Antwort wiederum mit Hilfe einer Näherungsrechnung.

Aufgabe H23 (Normalverteilung, Gesetze der großen Zahlen)

Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n seien unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

Berechnen Sie zunächst den Erwartungswert und die Varianz des arithmetischen Mittels

$$\bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Berechnen Sie dann für $\sigma^2 = 10$ die Wahrscheinlichkeit

$$P(\mu - \epsilon \leq \bar{X}_{(n)} \leq \mu + \epsilon)$$

für $\epsilon = 1$ bzw. $\epsilon = 0.1$ und $n = 10, 20, 50, 100$. Gegen welchen Wert konvergiert diese Wahrscheinlichkeit mit wachsendem Stichprobenumfang n ? Hängt der Grenzwert von ϵ ab? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe H24

Es wird vermutet dass die Zufallsvariable, welche die Lebensdauer (in h) eines speziellen Gerätes beschreibt, die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot 10^{-9} \cdot x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1000 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt. Eine Versuchsreihe mit 10 Geräten hat die folgenden Lebensdauern (in h) geliefert:

640 784 357 997 822 962 726 691 943 855

Prüfen Sie diese Vermutung mit Hilfe des Kolmogoroff-Smirnov-Tests auf der Basis der erhobenen Daten zum Niveau 0.05.