Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 06.06.2006

Einführung in die Statistik

7. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G19
In einer belgischen Schokoladenfabrik werden Pralinen hergestellt, deren Durchmesser einen Sollwert von 25 mm besitzen. Damit die Pralinen in die vorgefertigten Pralinenschachteln passen, muss überprüft werden, ob der Sollwert hinreichend genau eingehalten wird. Zu diesem Zweck sollen die Durchmesser einer bestimmten Anzahl von Pralinen nachgemessen werden. Aus Erfahrung weiß man, dass die Durchmesser der Pralinen als Realisierungen von unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Varianz 4 [mm^2] beschrieben werden können. Wie viele Messungen sind durchzuführen, damit die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 kleiner als 0.5 mm ist?

(a) Bestimmen Sie durch Anwendung der Ungleichung von Tschebyscheff eine untere Schranke für die gesuchte Anzahl.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes eine Näherung für die gesuchte Anzahl.

Aufgabe G20

(a) Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) sei normal-verteilt. Zeigen Sie, dass $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig sind genau dann, wenn $Var(X) = Var(Y)$.

(b) Seien X und Y unabhängig und χ^2_r- bzw. χ^2_s-verteilt. Zeigen Sie, dass $X + Y$ dann χ^2_{r+s}-verteilt ist.

Aufgabe G21
Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie:

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

impliziert

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

1. Hinweis: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ist $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ eine wachsende Folge von Ereignissen und A deren Vereinigung, so gilt $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Ist $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ eine fallende Folge von Ereignissen und B deren Durchschnitt, so gilt $P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$. (Diese Eigenschaft nennt man *σ-Stetigkeit* eines Wahrscheinlichkeitsmasses)

2. Hinweis: Betrachten Sie die Folge der Mengen

$$B_N = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N\}$$

sowie die Folge der Komplemente B_N^C.

(b) Benutzen Sie a), um das schwache Gesetz der großen Zahl aus dem starken Gesetz der großen Zahl abzuleiten.

Hausübungen

Aufgabe H19

(a) Seien $X_1, \ldots, X_{21}$ unabhängig und identisch $N(0, 21)$–verteilt. Mit

$$S^2_{(n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_{(n)})^2$$

sei die Stichprobenvarianz bezeichnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $S^2_{(21)}$ größer als 22 ist.

(b) Seien $X_1, \ldots, X_{13}, Y_1, \ldots, Y_7$ unabhängige identisch $N(\mu, \sigma^2)$–verteilte Zufallsvariablen. $S^2_{(13)}$ bezeichne die Stichprobenvarianz zu $X_1, \ldots, X_{13}$ und $\tilde{S}^2_{(7)}$ bezeichne die Stichprobenvarianz zu $Y_1, \ldots, Y_7$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $S^2_{(13)}$ um mehr als 6 % größer ist als $\tilde{S}^2_{(7)}$.

Eventuell benötigte Quantile : $\chi^2_{20;0.6} = 20.95 \quad F_{12;6;0.5} = 1.06$

Aufgabe H20

Zur Untersuchung von Wählerwanderungen befragt ein Meinungsforschungsinstitut 1200 zufällig ausgewählte wahlberechtigte Bürger Hessens nach ihrer letzten Landtagswahlentscheidung. Für die Partei A haben bei der Wahl nur 0.3% der hessischen Wähler gestimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 1200 befragten Bürgern höchstens zwei die Partei A gewählt hat

(a) mit Hilfe der Binomialverteilung,

(b) durch Anwendung des Poissonschen Grenzwertsatzes,

(c) durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes sowohl mit als auch ohne Stetigkeitskorrektur.

Aufgabe H21

Die Zufallsvariablen X, Y, Z seien χ_r^2-, bzw. t_n-, bzw. $F_{r,s}$-verteilt. Dann besitzen X und Z die Dichten

$$f_{\chi_r^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{r/2}\cdot\Gamma(r/2)} \cdot x^{r/2-1} \cdot e^{-x/2} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases}$$

$$f_{F_{r,s}}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma((r+s)/2)}{\Gamma(s/2)\cdot\Gamma(r/2)} \cdot r^{r/2} \cdot s^{s/2} \cdot \frac{x^{r/2-1}}{(s+rx)^{(r+s)/2}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst }. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet Γ die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt, \qquad x > 0,$$

für die gilt $\Gamma(1) = 1$ und

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \qquad x > 0.$$

(a) Bestimmen Sie eine Dichte für Y.

(b) Zeigen Sie, dass $E(Z) = s/(s-2)$ für $s > 2$.

(c) Berechnen Sie $Var(Y)$.

(d) Seien A und B unabhängig und exponential verteilt mit Parameter $1/2$. Zeigen Sie, dass A/B eine F-Verteilung besitzt.