Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 29.05.2006

Einführung in die Statistik

6. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G16

Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & \text{für} \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Randdichten die Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y von X bzw. Y.

b) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

c) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

d) Berechnen Sie $P(X \le Y)$.

Aufgabe G17

a) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit den Dichten f_X und f_Y. Zeigen Sie, dass

$$(f_X * f_Y)(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-u)\, f_Y(u)\, du$$

eine Dichte der Zufallsvariable $X + Y$ ist. $f_X * f_Y$ heißt die **Faltung** von f_X und f_Y.

b) Die zwei-dimensionale Variable (X, Y) besitze die Dichtefunktion f. Zeigen Sie, dass dann

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\; dx, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

eine Dichtefunktion für $Z = X + Y$ ist.

c) Ein technisches System S bestehe aus zwei Komponenten K_1 und K_2, deren Lebensdauern exponentialverteilt sind mit den Parametern $\lambda_1 > 0$ bzw. $\lambda_2 > 0$. Zunächst arbeitet S nur mit K_1; erst wenn K_1 ausfällt, springt K_2 ein (System mit kalter Reserve). Berechnen Sie unter der Annahme der Unabhängigkeit der Lebensdauern von K_1 und K_2 Dichte, Erwartungswert und Varianz der Lebensdauer von S.

Aufgabe G18
Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$. Sei $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungen von M und m.

b) Berechnen sie die Erwartungswerte $E(M)$ und $E(m)$.

c) Berechnen Sie die Kovarianz von M und m im Fall $n = 2$.

Hausübungen

Aufgabe H16
Eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f(s,t) = \begin{cases} s+t & \text{für } 0 < s,t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x,y)$, die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y (Randverteilungen) sowie die Randdichten f_X und f_Y.

b) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$, die Kovarianz $Cov(X,Y)$ und den Korrelationkoeffizienten $\varrho(X,Y)$. Sind X und Y unabhängig?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X + Y \leq 1)$.

Aufgabe H17
Für eine stetige Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ soll das Integral $J = \int_0^1 g(x)\, dx$ approximiert werden. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$. Betrachten Sie die folgenden beiden *Monte Carlo Verfahren* zur Approximation von J:

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i), \qquad \hat{J}_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \big(g(X_i) + g(1 - X_i)\big).$$

a) Zeigen Sie, dass $E(\hat{J}_1) = E(\hat{J}_2) = J$.

b) Zeigen Sie, dass $Var(\hat{J}_2) \leq Var(\hat{J}_1)$.

Aufgabe H18
In einer Urne liegen 6 schwarze, 12 rote und 18 weiße Kugeln. Die Zufallsvariablen S, R und W beschreiben die Anzahl der gezogenen schwarzen, roten und weißen Kugeln beim Ziehen von 3 Kugeln mit Zurücklegen.

a) Bestimmen Sie die Verteilung der zweidimensionalen Zufallsvariablen (S, W).

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\varrho(S, W)$.

c) Begründen Sie anschaulich (ohne Rechnung), dass der Korrelationskoeffizient $\varrho(W, R)$ einen negativen Wert haben muss.