Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 22.05.2006

Einführung in die Statistik

5. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G13

(a) Eine Stadt möchte aus den Überschüssen aus der Parkraumbewirtschaftung 15% der eingesetzten Parkuhren durch neue Modelle ersetzen. Hierzu wird die Genauigkeit der ablaufenden Parkzeit, die bei wiederholter Messung für jede Parkuhr jeweils unverändert bleibt, als Austauschkriterium herangezogen. Laut Hersteller ist die tatsächliche Dauer der ablaufenden Parkzeit des verwendeten Parkuhrmodells bei der Einstellung auf 60 Minuten durch eine $N(60, 4)$–verteilte Zufallsvariable angemessen beschrieben. Geben Sie die zulässige Toleranz für die ablaufende Parkzeit der Parkuhren an, so dass eine Parkuhr bei Einhaltung dieser Toleranz nicht durch ein neues Modell ersetzt wird.

(b) Sei X eine Zufallsgröße mit existierendem Erwartungswert $E(X^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $E(X)$ und $E((X-a)^2)$ existieren ($a \in \mathbb{R}$), und weiter, dass

$$E((X - E(X))^2) = \min_{a \in \mathbb{R}} E((X-a)^2).$$

Aufgabe G14 Zeigen Sie, dass eine Binomial-Verteilung im folgenden Sinne durch eine Poisson-Verteilung approximiert werden kann:
Sei $X_n \sim B(n, p_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim P(\lambda)$. Gilt dann

$$n \cdot p_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda,$$

so folgt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(X_n = k) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} P(X = k).$$

Aufgabe G15 Ein Gast eines Spielkasinos verfolgt die nachstehende Strategie beim Roulette: Er setzt nur auf das erste Drittel $(1 - 12)$, und nimmt sich vor, so lange zu spielen, bis er zum ersten Mal gewinnt. In diesem Fall erhält er den 3-fachen Einsatz zurück. Im ersten Spiel setzt er 1 Euro; verliert er, so verdoppelt er seinen Einsatz im nächsten Spiel, usw.

(a) Angenommen der Spieler hätte unendlich viel Kapital und Zeit. Geben Sie den zu erwartenden Gewinn des Spielers an, falls dieser existiert.

(b) Es erscheint realistischer, dass der Spieler nur endlich viel Kapital besitzt. Berechnen Sie unter dieser zusätzlichen Annahme den zu erwartenden Gewinn.

Nehmen Sie an, dass an einem Roulette ohne 0 gespielt wird.

Hausübungen

Aufgabe H13 X sei eine $N(5,9)$–verteilte Zufallsvariable.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 7), P(X > 0)$ und $P(3 \leq X \leq 7)$.

b) Bestimmen Sie den Median und das 0.95–Quantil von X.

c) Sei Y die Zufallsvariable $Y = \frac{1}{3}X + 2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq 1)$ und den Median von Y.

Aufgabe H14

(a) Sei X eine standard normalverteilte Zufallsgröße. Berechnen Sie eine Wahrscheinlichkeitsdichte von $Y = X^2$ und bestimmen Sie $E(Y)$.
(Die Verteilung von Y heißt χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad).

(b) Sei X gleichverteilt auf $]1,5[$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und eine Wahrscheinlichkeitsdichte von $Y = X/(5-X)$. Besitzt Y einen Erwartungswert?

Aufgabe H15 Die Zufallsvariable X ist stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen X^2.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(|X| < 2)$.