Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lehn
A. Neuenkirch
B. Niese
A. Rößler

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 15.05.2006

Einführung in die Statistik

4. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G10

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

Aufgabe G11

Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Eier, die von einem bestimmten Insekt gelegt werden, Poisson verteilt ist mit Parameter λ. Nehmen Sie weiterhin an, dass, falls k Eier gelegt wurden, die Anzahl der sich entwickelnden Eier eine Binomialverteilung $B(k, p)$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Gesamtzahl der überlebenden Eier Poisson verteilt ist mit Parameter $\lambda \cdot p$.

Aufgabe G12

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und $P(X = n) > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz von a) and b).

(a) X ist geometrisch verteilt.

(b) Die Verteilung von X hat die Eigenschaft der *Gedächtnislosigkeit*, d.h.,

$$P(\{X > n + k\} | \{X > n\}) = P(X > k)$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

Hausübungen

Aufgabe H10

Die Zufallsvariable X ist stetig verteilt mit der Dichte

$$f(t) = \begin{cases} c \cdot t \cdot e^{-\alpha t^2}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\alpha > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine Konstante c in Abhängigkeit von α. Skizzieren Sie die Dichte für $\alpha = 1$.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

(c) Berechnen Sie für $x \geq 0$ und $b > 0$ die folgenden Wahrscheinlichkeiten

$$P(x \leq X < \infty) \quad P(b + x \leq X < \infty \mid b \leq X < \infty)\,.$$

Welche der beiden Wahrscheinlichkeiten ist größer? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe H11

Sei X eine in $[0, \pi]$ rechteckverteilte Zufallsvariable. Ferner seien $U = \cos(X)$ und $V = \sin(X)$.

1) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $|U|$.

2) Berechnen Sie $P(|U| \leq |V|)$.

3) Berechnen Sie den Erwartungswert von U und U^2.

Aufgabe H12

Betrachten Sie eine diskrete oder stetige Zufallsvariable X.

(a) Angenommen, X nimmt nur Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ an. Gilt dann $E(1/X) = 1/E(X)$ falls diese Erwartungswerte existieren? Gilt $E(1/X) \neq 1/E(X)$ falls X nicht konstant ist?

(b) Nehmen Sie an, dass X nur Werte in $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ annimmt. Zeigen Sie, dass

$$h(E(X)) \leq E(h(X))$$

für jede konvexe Funktion $h : (a, b) \to \mathbb{R}$. Das ist ein Spezialfall der *Jensen'schen Ungleichung.*

Sprechstunden

Gruppe	Name	Zeit	Raum
M1	Andreas Rößler	Do. 8.45-9.45 Uhr	S215/444
M2	Hanno Schülldorf	Di. 12.00-13.00 Uhr	S215/415
M3	Necati Mercan	Do. 16.15-17.15 Uhr	S215/217
M4	Jens Preiß	Mo. 13.00-14.00 Uhr	S215/415
M5	Liu Qingzhe	Do. 14.00-15.00 Uhr	S215/415
M6	Raphael Schulz	Mi. 9.50-10.50 Uhr	S215/415