



Einführung in die Statistik

3. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G7

Eine Münze mit den Seiten *Wappen* und *Zahl* werde viermal geworfen. Prüfen Sie, ob unter der Laplace-Annahme die folgenden Ereignisse A, B und C jeweils paarweise unabhängig sind:

- Ereignis A: Gleiche Seiten bei den ersten beiden Würfeln
- Ereignis B: Gleiche Seiten beim 1. und 4. Wurf
- Ereignis C: Gleiche Seiten bei den letzten drei Würfeln

Sind die Ereignisse vollständig unabhängig?

Aufgabe G8

Von drei Gefangenen, nennen wir sie 1, 2 und 3, sind zwei durch Losen zum Tode verurteilt worden. Gefangener 3 sagt zum Wärter: "Einer von den Gefangenen 1 und 2 wird auf jeden Fall hingerichtet. Sag mir, welcher es ist. Damit gibst Du mir keine Information darüber ob ich auch hingerichtet werde." Der Wärter findet das vernünftig und antwortet: "1 wird hingerichtet." Jetzt überlegt Gefangener 3: "Ich weiß, dass 1 hingerichtet wird; der andere ist entweder 2 oder ich, also werde ich jetzt nur noch mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ hingerichtet anstatt mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ wie zuvor." Anscheinend hat ihm der Wärter doch Information über sich gegeben. Klären Sie dieses Paradoxon.

Aufgabe G9

X und Y seien Zufallsvariablen mit den Dichten f bzw. g .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $2X$, Y^2 und $3Y - 4$ und geben Sie jeweils eine Dichte an.

Hausübungen

Aufgabe H7

- a) Ein Würfel wird geworfen, bis eine 6 erscheint, höchstens jedoch sechsmal. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Würfe.
- (i) Geben Sie die Verteilung von X in einer Tabelle an.
 - (ii) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X .
 - (iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens zweimal, jedoch höchstens viermal zu würfeln ?
- b) Drei Würfel werden geworfen. Als „Erfolg“ gilt, wenn alle drei Würfel die gleiche Augenzahl zeigen. Die Zufallsvariable X gebe die Nummer des ersten Wurfes an, bei dem sich ein Erfolg einstellt. Bestimmen Sie unter geeigneten Annahmen die folgenden Wahrscheinlichkeiten :
- (i) $P(33 \leq X \leq 36)$
 - (ii) $P(X > 10)$

Aufgabe H8 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Familie genau k Kinder hat, sei $p_k = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k, k \geq 0$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig herausgegriffenen Kind um einen Jungen handelt, sei $\frac{12}{23}$. Für die Geschlechtszugehörigkeit verschiedener Kinder innerhalb einer Familie wird die Unabhängigkeitsannahme gemacht.

- (a) Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den Kindern einer zufällig ausgewählten Familie genau ein Junge ist ?
- (b) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Junge genau eine Schwester hat, falls es sich um eine Familie mit genau einem Jungen handelt ?

Hinweis : $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$ für $0 < p < 1$.

Aufgabe H9

Eine zufällige Anzahl N von Würfeln wird geworfen. A_i bezeichne das Ereignis, dass $N = i$ ist und es gelte $P(A_i) = 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- (a) zwei Würfel geworfen wurden unter der Bedingung, dass die Augensumme 4 beträgt,
- (b) die Augensumme 4 beträgt unter der Bedingung, dass eine gerade Anzahl von Würfeln geworfen wird,
- (c) zwei Würfel geworfen wurden unter der Bedingung, dass die Augensumme 4 beträgt und der erste Würfel eine 1 zeigt,
- (d) das Maximum der geworfenen Augen r beträgt.