



Einführung in die Statistik

1. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Bei einer Messung der Windgeschwindigkeiten (in Meilen pro Stunde) auf dem La Guardia Flughafen in New York ergaben sich in den ersten 29 Tagen des Monats Mai (1973) jeweils um 7.00 Uhr die folgenden Werte

7.4	8.0	12.6	11.5	14.3	14.9	8.6	13.8
20.1	8.6	6.9	9.7	9.2	10.9	13.2	11.5
12.0	18.4	11.5	9.7	9.7	16.6	9.7	12.0
16.6	14.9	8.0	12.0	14.9			

- (a) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion zu der Messreihe und erstellen Sie ein Histogramm mit Gesamtfläche 1 zu der Klasseneinteilung: $(5.0, 7.0]$, $(7.0, 9.0]$, \dots , $(19.0, 21.0]$.
- (b) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel, den Median, die Spannweite, die empirische Varianz, die empirische Standardabweichung und den Quartilabstand.
- (c) Veranschaulichen Sie die Struktur der Messreihe mit Hilfe eines Boxplots.

Aufgabe G2 Sei x_1, \dots, x_n eine Messreihe mit Median \tilde{x} und $y_i = f(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$, mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie: Ist f monoton wachsend, so gilt für den Median \tilde{y} der transformierten Messreihe y_1, \dots, y_n

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}).$$

- (b) Wie transformiert sich der Median \tilde{x} wenn f monoton fallend ist?

Aufgabe G3 Gegeben seien m Messreihen

$$x_1^{(j)}, \dots, x_{n_j}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

mit arithmetischen Mittelwerten $\bar{x}^{(j)}$ und empirischen Varianzen $s_{x^{(j)}}^2$.

- (a) Zeigen Sie, dass sich das arithmetische Mittel \bar{x} der zusammengesetzten Messreihe

$$x_1^{(1)}, \dots, x_{n_m}^{(m)}$$

als konvexe Linearkombination der arithmetischen Mittel $\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(m)}$ schreiben lässt, d.h.,

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \bar{x}^{(j)}$$

mit $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_m \leq 1$ und $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$.

- (b) Lässt sich, analog zu a), auch die empirische Varianz s_x^2 der zusammengesetzten Messreihe als konvexe Linearkombination der empirischen Varianzen $s_{x^{(1)}}^2, \dots, s_{x^{(m)}}^2$ schreiben?

Hausübungen

Aufgabe H1 In 40 Haushalten wurde die Anzahl der vorhandenen Elektrogeräte ermittelt. Es ergaben sich die folgenden Werte:

12	18	6	10	9	5	8	11	14	11
12	15	8	17	12	6	7	12	13	9
11	20	7	14	13	12	13	19	15	8
15	12	11	14	14	9	7	15	6	11

- (a) Bestimmen Sie den Median zu dieser Messreihe.
- (b) Erstellen Sie die zugehörige empirische Verteilungsfunktion und lesen Sie daraus die empirischen Quantile $x_{0,1}$ und $x_{0,7}$ ab.
- (c) Veranschaulichen Sie die Messreihe mit einem Stabdiagramm.
- (d) Erstellen Sie einen Boxplot.

Aufgabe H2 Maßzahlen bei linearer Transformation einer Meßreihe

Es sei x_1, \dots, x_n eine Meßreihe und \bar{x} das zugehörige arithmetische Mittel.

1. Man zeige: Werden die Werte einer Meßreihe gemäß $y_i = a \cdot x_i + b, i = 1, \dots, n$, linear transformiert, so gilt für das arithmetische Mittel \bar{y} der transformierten Werte

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b,$$

d.h. das arithmetische Mittel der transformierten Werte ist gleich dem transformierten Mittel der ursprünglichen Werte.

2. Welche Formel ergibt sich bei der Situation in a) für die empirische Varianz s_y^2 der transformierten Werte in Abhängigkeit der empirischen Varianz s_x^2 der ursprünglichen Werte?
3. Auf einer Touristeninsel in der Karibik wurden in den letzten beiden Juliwochen jeweils morgens zur gleichen Zeit die folgenden Lufttemperaturen in °Fahrenheit gemessen:

78 82 81 82 80 83 77 81 79 79 83 78 78 79 .

Man berechne die Durchschnittstemperatur, d.h. das arithmetische Mittel der gemessenen Temperaturen, in °Fahrenheit und °Celsius (Hinweis: $x[^\circ F]$ entsprechen $y = \frac{5}{9}(x - 32)[^\circ C]$). Wie groß ist die empirische Standardabweichung der gemessenen Temperaturen in °C?

Aufgabe H3 Betrachten Sie noch einmal die m Messreihen aus Aufgabe G3.

- (a) Zeigen Sie, dass für die empirische Varianz der zusammengesetzten Messreihe

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^m (n_j - 1) \cdot s_{x^{(j)}}^2 + \sum_{j=1}^m n_j \cdot (\bar{x}^{(j)})^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

gilt, wobei $n = \sum_{j=1}^m n_j$.

- (b) Bei der Berechnung des arithmetischen Mittels und der empirischen Varianz einer Messreihe x_1, \dots, x_{21} ergaben sich die Werte 6.45 und 2.485. Nachträglich stellt sich heraus, dass der Wert $x_{21} = 10$ unberücksichtigt blieb. Können Sie die Ergebnisse korrigieren?