Lösungsvorschlag zur 12. Übung

G34

a) Zweiseitiger Gauß-Test mit $H_0: \ \mu = 38$

$$T(x_1, \ldots, x_{81}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\bar{x}_{(81)} - \mu_0) = \frac{\sqrt{81}}{6}(37 - 38) = -1.5$$

Da $|T| = 1.5 < 1.96 = u_{0.975}$ ist, kann gegen H_0 nichts eingewendet werden.

b) Die Nullhypothese wird nicht verworfen, falls das Ereignis „$|T(X_1, \ldots, X_{81})| \leq u_{0.975}$" eintritt. Falls $\mu_1 = 37$ der wahre Wert von μ ist, dann ist $\bar{X}_{(81)} \sim N\left(37; \frac{36}{81}\right)$ und somit ist

$$T(X_1, \ldots, X_{81}) = \frac{9}{6}(\bar{X}_{(81)} - 38)$$

$N(-1.5; 1)$-verteilt. Dann gilt

$$P(|T(X_1, \ldots, X_{81})| \leq 1.96) = \Phi(1.96 + 1.5) - \Phi(-1.96 + 1.5) = 1 - 0.323 = 0.677$$

c) Die Zufallsvariable $T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{6}(\bar{X}_{(n)} - 38)$ ist $N\left(-\frac{\sqrt{n}}{6}; 1\right)$-verteilt, falls $\mu = 37$ gilt. Es folgt

$$P(|T(X_1, \ldots, X_n)| \leq 1.96) = \Phi\left(1.96 + \frac{\sqrt{n}}{6}\right) - \Phi\left(-1.96 + \frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist sicher dann ≤ 0.05, falls gilt:

$$-1.96 + \frac{\sqrt{n}}{6} \geq u_{0.95} = 1.64$$

Diese Bedingung ist für $n \geq 467$ erfüllt.

G35

Es gibt $r = 10$ Klassen. Da es sich um eine $R(0; 1)$-Verteilung handelt, gilt $p_i^0 = 0.1$ für $i = 1, \ldots, 10$. Zur Berechnung des Wertes der Testgöße verwenden wir die vereinfachte Formel (112) auf Seite 155 (Auflage 2000):

$$Q(y_1, \ldots, y_{10}; p_1^0, \ldots, p_{10}^0) = \sum_{j=1}^{10} \frac{y_j^2}{1000 \cdot 0.1} - 1000 = 31.32$$

Das passende Quantil der χ^2-Verteilung ist $\chi^2_{9;0.95} = 16.92$.
Da $Q(y_1, \ldots, y_{10}; p_1^0, \ldots, p_{10}^0) = 31.32 > 16.92 = \chi^2_{9;0.95}$ ist, wird die Annahme der Gleichverteilung der Zufallszahlen abgelehnt.

G36

Verwendetes Testverfahren: χ^2-Anpassungstest
Hypothese:

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \frac{9}{16} = 0.5625 \ \text{„rund, gelb“} \\ p_2^0 &= \frac{3}{16} = 0.1875 \ \text{„rund, grün“} \\ p_3^0 &= \frac{3}{16} = 0.1875 \ \text{„kantig, gelb“} \\ p_4^0 &= \frac{1}{16} = 0.0625 \ \text{„kantig, grün“} \end{aligned}$$

Wert der Testgröße:

i	n_i	$n \cdot p_i^0$	$\frac{(n_i - n \cdot p_i^0)^2}{n \cdot p_i^0}$
1	345	344.25	0.002
2	120	114.75	0.240
3	111	114.75	0.123
4	36	38.25	0.132
$\sum$	612		$Q = 0.497$

Entscheidung:

a) $\alpha = 0.05 \implies \chi^2_{3;0.95} = 7.82 > 0.497 = Q$

b) $\alpha = 0.25 \implies \chi^2_{3;0.75} = 4.11 > 0.497 = Q$

Für beide Niveaus kann gegen die Hypothese nichts eingewendet werden.

G37

Verwendetes Verfahren: χ^2-Anpassungstest für eine Verteilung
$X \sim Ex(2.5) \implies F_X(x) = 1 - e^{-2.5x}$ für $x > 0$

$H_0 : (p_1, p_2, \ldots, p_5) = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_5^0)$ mit

$$\begin{aligned}
p_1^0 &= 1 - e^{-2.5 \cdot 0.1} && = 0.2212 \\
p_2^0 &= e^{-2.5 \cdot 0.1} - e^{-2.5 \cdot 0.25} && = 0.2435 \\
p_3^0 &= e^{-2.5 \cdot 0.25} - e^{-2.5 \cdot 0.4} && = 0.1674 \\
p_4^0 &= e^{-2.5 \cdot 0.4} - e^{-2.5 \cdot 0.75} && = 0.2145 \\
p_5^0 &= 1 - (1 - e^{-2.5 \cdot 0.75}) && = 0.1534
\end{aligned}$$

Wert der Testgröße:

i	n_i	$n \cdot p_i^0$	$\frac{(n_i - n \cdot p_i^0)^2}{n \cdot p_i^0}$
1	47	54.86	1.1261
2	55	60.39	0.4811
3	50	41.52	1.7319
4	51	53.20	0.0910
5	45	38.04	1.2734
$\sum$	248	248.01	$Q = 4.7035$

Entscheidung:
$\chi^2_{4;0.9} = 7.78 > 4.7035 = Q$
Die Vermutung, dass eine $Ex(2.5)$-Verteilung vorliegt, wird auf dem Niveau 0.1 nicht verworfen.

G38

Vierfeldertafel:

	männlich	weiblich	
bestanden	10	7	17
nicht bestanden	13	6	19
	23	13	36

a) Verwendetes Testverfahren: χ^2-Unabhängigkeitstest
H_0: „Prüfergebnis und Geschlechtszugehörigkeit sind unabhängig“
Testgröße: (Seite 160 unten für $k = l = 2$, Auflage 2000)

$$T((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)) = n \cdot \frac{(n_{11} \cdot n_{22} - n_{12} \cdot n_{21})^2}{n_{1\bullet} \cdot n_{2\bullet} \cdot n_{\bullet 1} \cdot n_{\bullet 2}} = 36 \cdot \frac{(10 \cdot 6 - 7 \cdot 13)^2}{17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 13} = 0.3582$$

$\chi^2_{1;0.95} = 3.84$
Da $T = 0.3582 < 3.84 = \chi^2_{1;0.95}$ ist, wird auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ nichts gegen H_0 eingewendet.

b) Beschreibe X die Anzahl der Männer unter den Teilnehmern, welche den Test bestehen. Vorstellung: Die Teilnehmer, welche den Test bestehen, werden „ohne Zurücklegen“ herausgegriffen. Im Falle der Unabhängigkeit von

Prüfergebnis und Geschlechtszugehörigkeit gilt: $X \sim H(17; 36; 23)$.
Bestimmung der Quantile $h_{0.025}$ und $h_{0.975}$ der $H(17; 36; 23)$-Verteilung:

$$P(X = k) = \frac{\binom{23}{k} \cdot \binom{13}{17-k}}{\binom{36}{17}}\ ,\ k = 4, 5, \ldots, 17$$

$$P(X \leq 8) = 0.0499 > 0.025 \implies h_{0.025} = 8$$

$$P(X \geq 14) = 0.032 > 0.025 \implies h_{0.975} = 14$$

Da $n_{11} = 10$ und $h_{0.025} = 8 < 10 < 14 = h_{0.975}$ gilt, kann nichts gegen H_0 eingewendet werden.

G39

Verwendetes Testverfahren: χ^2-Unabhänigkeitstest
H_0: „Wochentag und Auslastung sind unabhängig“
Testgröße:

$$Q((x_1, y_1), \ldots, (x_{100}, y_{100})) = 100 \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} \frac{n_{ij}^2}{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}} - 1 \right) = 22.78$$

Kritischer Bereich:

$$Q > \chi^2_{(4-1)(5-1);0.95} = \chi^2_{12;0.95} = 21.03$$

Da $Q = 22.78 > 21.03 = \chi^2_{12;0.95}$ ist, <u>wird H_0 verworfen</u>.