Lösungsvorschlag zur 11. Übung

G31

a) Zum Testen der Hypothese $H_0: \mu = 1000$ wird der t-Test verwendet. Es ist $\bar{x} = 999.3$ und $s^2 = 3.9$.
Die Testgröße ist

$$T(x_1, \dots, x_{10}) = \sqrt{10} \cdot \frac{999.3 - 1000}{\sqrt{3.9}} = -1.1209$$

Da $|T(x_1, \dots, x_{10})| = 1.1209 < 2.26 = t_{9;0.975}$ ist, wird gegen H_0 nichts eingewendet.

b) Zum Testen der Hypothese $H_0: \sigma^2 \geq 4$ wird ein χ^2-Streuungstest verwendet.
Die Testgröße ist

$$T(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{9}{4} \cdot 3.9 = 8.775$$

Da $T(x_1, \dots, x_{10}) = 8.775 > 3.32 = \chi^2_{9;0.05}$ ist, wird gegen H_0 nichts eingewendet.

G32

a) Zum Testen der Hypothese $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ wird ein Zweistichproben-t-Test durchgeführt.
Die Testgröße ist

$$T(x_1, \dots, x_{21}, y_1, \dots, y_9) = \sqrt{\frac{21 \cdot 9 \cdot 28}{30}} \cdot \frac{503 - 501}{\sqrt{20 \cdot 3.24 + 8 \cdot 3.61}} = 2.744$$

Da $T(x_1, \dots, x_{21}, y_1, \dots, y_9) = 2.744 > 1.70 = t_{28;0.95}$ ist, wird die Hypothese verworfen.

b) Zum Testen der Hypothese $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ wird der F-Test verwendet. Als Testgröße ergibt sich:

$$T(x_1, \dots, x_{21}, y_1, \dots, y_9) = \frac{3.24}{3.61} = 0.8975$$

Wegen

$$F_{20;8;0.05} = \frac{1}{F_{8;20;0.95}} = 0.4086 < 0.8975 < 3.1502 = F_{20;8;0.95}$$

kann gegen die Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ nichts eingewendet werden.

Anmerkung: Eigentlich ist es sinnvoller, den F-Test vor dem Zweistichproben-t-Test durchzuführen, denn letzterer geht von der Gleichheit der Varianzen aus.
Wenn also der F-Test die Hypothese $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ablehnt, dann braucht man den Zweistichproben-t-Test zur Prüfung der Gleichheit der Erwartungswerte nicht mehr durchzuführen.

G33

Es gilt:

$$P_\theta(X = i) = \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{\theta - m}{n - i}}{\binom{\theta}{n}} \qquad \text{(Hypergeometrische Verteilung)}$$

$X \mathrel{\widehat{=}}$ „Anzahl der markierten Fische unter den n gefangenen“
Wir suchen entsprechend der Maximum-Likelihood-Methode das Maximum $\hat{\theta}$ von $P_\theta(X = i)$ bzgl. $\theta \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_{\theta-1}(X = i) \leq P_\theta(X = i) &\iff \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{\theta-1-m}{n-i}}{\binom{\theta-1}{n}} \leq \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{\theta-m}{n-i}}{\binom{\theta}{n}} \implies \frac{\binom{\theta}{n}}{\binom{\theta-1}{n}} \leq \frac{\binom{\theta-m}{n-i}}{\binom{\theta-1-m}{n-i}} \\
&\implies \frac{\theta! \cdot n! \cdot (\theta - 1 - n)!}{n! \cdot (\theta - n)! \cdot (\theta - 1)!} \leq \frac{(\theta - m)! \cdot (n - i)! \cdot (\theta - 1 - m - n + i)!}{(n - i)! \cdot (\theta - m - n + i)! \cdot (\theta - 1 - m)!} \\
&\implies \frac{\theta}{\theta - n} \leq \frac{\theta - m}{\theta - m - n + i} \\
&\iff \theta^2 - m\theta - n\theta + i\theta \leq \theta^2 - m\theta - n\theta + n \cdot m \\
&\iff \theta \leq m \cdot \frac{n}{i}
\end{aligned}$$

Analog:

$$P_{\theta-1}(X = i) > P_\theta(X = i) \iff \theta > m \cdot \frac{n}{i}$$

$\Longrightarrow$ Als Schätzer für θ ergibt sich

$$T(X_1,\ldots,X_n) = \left[m \cdot \frac{n}{X_1+\cdots+X_n}\right] = \left[m \cdot \frac{1}{\bar{X}_{(n)}}\right]$$

wobei $[a]$ die größte ganze Zahl sei, die nicht größer als a ist, sowie

$$X_j := \begin{cases} 1 & \text{falls } j\text{-ter gefangener Fisch markiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $j = 1,\ldots,n$.

H31

Das Konfidenzschätzverfahren aus Satz 3.25 (Auflage 1992) liefert Konfidenzintervalle der Länge

$$L = 2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

a) Für $\alpha = 0.05$ und $\sigma_0 = 3$ ergibt sich $u_{0.975} = 1.96$ und somit

$$L = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 1.2 \Longrightarrow \frac{2 \cdot 1.96 \cdot 3}{1.2} \leq \sqrt{n} \Longrightarrow 9.8 \leq \sqrt{n} \Longrightarrow 96.04 \leq n$$

Für $n \geq 97$ ist die angegebene Bedingung erfüllt.

b) Mit $n = 300$ und $L = 0.5$ ergibt sich

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} = \frac{0.5}{2} \cdot \frac{\sqrt{300}}{3} = 1.443$$

$$\Phi(1.443) = 0.925 \overset{!}{=} 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0.15$$

Das Konfidenzniveau ist 0.85.

c) Das konkrete Schätzintervall besitzt die Länge

$$L = 2 \cdot \underbrace{1.64}_{u_{0.95}} \cdot \frac{3}{\sqrt{200}} \approx 0.6958$$

H32

a) Testverfahren: Gauß-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$
Nullhypothese: $H_0 : \mu = 52$
Testgröße: $T\left(X_1,\ldots,X_n\right) = \frac{\bar{X}_{(n)}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2 \cdot \frac{1}{n}}}$

$$\Longrightarrow T\left(x_1,\ldots,x_{20}\right) = \frac{52.1 - 52}{\sqrt{\frac{0.05}{20}}} = 2$$

Kritischer Bereich: $|T| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$.
Da $|T| = 2 > 1.96 = u_{0.975}$ gilt, <u>wird H_0 verworfen</u>.

b) $H_0 : \mu = \mu_0$,
H_0 wird nicht verworfen $\Longleftrightarrow |T| \leq 1.96 \Longleftrightarrow \left|\frac{52.1-\mu_0}{\sqrt{\frac{0.05}{20}}}\right| \leq 1.96 \Longleftrightarrow |52.1 - \mu_0| \leq 0.098$
$\Longleftrightarrow -0.098 \leq 52.1 - \mu_0 \leq 0.098 \Longleftrightarrow 52.1 - 0.098 \leq \mu_0 \leq 52.1 + 0.098 \Longleftrightarrow \mu_0 \in [52.002, 52.198]$

c) Laut Satz 3.25 (Auflage 1992) ist bei bekanntem σ_0^2
$I\left(X_1,\ldots,X_n\right) = \left[\bar{X}_{(n)} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X}_{(n)} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$
ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1-\alpha$. Man erhält mit obigen Daten das konkrete Schätzintervall
$I\left(x_1,\ldots,x_{20}\right) = [52.002, 52.198]$
welches mit Aufabenteil b) übereinstimmt.

H33

a) Seien $X_1, \dots, X_{30}$ identisch $B(1,\theta)$-verteilte, unabhängige Zufallsvariablen.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls i-ter Chip defekt} \\ 0 & \text{, falls i-ter Chip nicht defekt} \end{cases}$$

Testgröße: $T_\theta\left(X_1, \dots, X_{30}\right) = \sum_{i=1}^{30} X_i$. Dann ist T_θ $B(30,\theta)$-verteilt.
Kritischer Bereich: $K_\theta = \{(x_1, \dots, x_{30}) \in \{0,1\}^{30} : \sum_{i=1}^{30} x_i > 1\}$
Nach Definition gilt für die OC-Funktion:

$$\begin{aligned}\beta(\theta) = P_\theta\left((X_1, \dots, X_{30}) \notin K_\theta\right) = P_\theta\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 1\right) = \binom{30}{0} \cdot \theta^0 \cdot (1-\theta)^{30} + \binom{30}{1} \cdot \theta^1 \cdot (1-\theta)^{29} \\ = (1-\theta)^{30} + 30 \cdot \theta \cdot (1-\theta)^{29} \qquad \text{für alle } \theta \in [0,1]\end{aligned}$$

Gütefunktion: $g(\theta) = 1 - \beta(\theta) = 1 - (1-\theta)^{30} - 30 \cdot \theta \cdot (1-\theta)^{29}$

b) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art:
$P_\theta\left((X_1, \dots, X_{30}) \in K_\theta\right) = g(\theta) = 1 - (1-\theta)^{30} - 30 \cdot \theta \cdot (1-\theta)^{29}$ für alle $\theta \in [0, 0.01]$.
Zeige: $g(\theta)$ ist monoton wachsend für $\theta \in [0, 0.01]$:

$$g'(\theta) = 30 \cdot (1-\theta)^{29} - 30 \cdot (1-\theta)^{29} + 30 \cdot \theta \cdot 29 \cdot (1-\theta)^{28} = 30 \cdot 29 \cdot \theta \cdot (1-\theta)^{28} \geq 0 \text{ für alle } \theta \in [0,1]$$

Also ist $P_\theta\left((X_1, \dots, X_{30}) \in K_\theta\right) \leq P_{0.01}\left((X_1, \dots, X_{30}) \in K_{0.01}\right) = g(0.01) = 0.03615 < 0.05$ für $\theta \in [0, 0.01]$
$\Longrightarrow$ $P_\theta\left((X_1, \dots, X_{30}) \in K_\theta\right) \leq 0.05$ für alle $\theta \in [0, 0.01]$
$\Longrightarrow$ Der vorgeschlagene Test ist ein Test zum Signifikanzniveau 0.05

c) Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art:

$$P_{0.05}\left((X_1, \dots, X_{30}) \in K_{0.05}\right) = \beta(0.05) = 0.5535$$