Lösungsvorschlag zur 10. Übung

G28

a)

$$\begin{aligned}
P_\theta(Y \le y) &= P_\theta(\ln(X) \le y) = P_\theta(X \le e^y) \\
&= \int_0^{e^y} \frac{1}{t \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \ln(t)}{\sigma}\right)^2\right) dt \\
\text{Substitution: } s = \ln(t)\,, &\quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\,, \quad \text{d. h. } ds = \frac{1}{t} \cdot dt \\
&= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - s}{\sigma}\right)^2\right) ds
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \underline{Y \sim N\left(\theta, \sigma^2\right)}.$

b) Alle Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ seien größer Null. Dann gilt für die Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned}
L\left(\theta; x_1, \ldots, x_n\right) &= \prod_{i=1}^{n} f_\theta\left(x_i\right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta - \ln(x_i)}{\sigma}\right)^2} \\
g(\theta) := \ln\left(L\left(\theta; x_1, \ldots, x_n\right)\right) &= n \cdot \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta - \ln\left(x_i\right)}{\sigma}\right)^2 \\
g'(\theta) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\theta - \ln\left(x_i\right)\right) &= \frac{-n \cdot \theta}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i\right) \overset{!}{=} 0 \\
\Longrightarrow n \cdot \theta = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i\right) &\Longrightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i\right)
\end{aligned}$$

$g''(\theta) = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \Longrightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i\right)$ ist das Maximum der Likelihood-Funktion.
M-L-Schätzer: $\hat{\theta}_n\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(X_i\right)$.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
E_\theta\left(\hat{\theta}_n\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right) &= E_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(X_i\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_\theta\left(\ln\left(X_i\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \theta = \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var_\theta\left(\hat{\theta}_n\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right) &= Var_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i\right)\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var_\theta\left(\ln\left(x_i\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\theta}_n$ erwartungstreu für θ und da $\lim_{n\to\infty} Var_\theta(\hat{\theta}_n) = 0$ gilt, ist die Schätzerfolge $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots$ konsistent.

G29

a) Die Likelihood-Funktion lautet: $L(\lambda; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i!)^{-1}$

$$g(\lambda) := \ln(L(\lambda; x_1, \ldots, x_n)) = -n\lambda + \ln(\lambda) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

$$g'(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$g''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) < 0$$

$\implies \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ ist das Maximum der Likelihood-Funktion.
M-L-Schätzer: $\hat{\lambda}_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

b) Es bezeichne $\bar{X}_{(n)}$ das arithmetische Mittel der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$.
Dann gilt für $\hat{\lambda}_n(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_{(n)}$:

$$E_\lambda\left(\hat{\lambda}_n\right) = E_\lambda\left(\bar{X}_n\right) = E_\lambda(X_1) = \lambda$$

$$Var_\lambda\left(\hat{\lambda}_n\right) = Var_\lambda\left(\bar{X}_{(n)}\right) = \frac{1}{n} \cdot Var_\lambda(X_1) = \frac{\lambda}{n}$$

c) Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit p gilt zunächst

$$\begin{aligned} p &= P_5\left(\left|\bar{X}_{(50)} - 5\right| \geq 0.5\right) = 1 - P_5\left(4.5 < \bar{X}_{(50)} < 5.5\right) \\ &= 1 - P_5(225 < X_1 + \cdots + X_{50} < 275) \\ &= 1 - P_5(226 \leq X_1 + \cdots + X_{50} \leq 274) \end{aligned}$$

Mit dem ZGS (mit Stetigkeitskorrektur) gilt

$$\begin{aligned} p &\approx 1 - \left(\Phi\left(\frac{274 + 0.5 - 250}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{226 - 0.5 - 250}{\sqrt{250}}\right)\right) \\ &= 1 - (\Phi(1.55) - \Phi(-1.55)) = 2 - 2\Phi(1.55) = 0.122 \end{aligned}$$

d) Da der Schätzer $\hat{\lambda}_n$ erwartungstreu ist und da $\lim_{n\to\infty} Var_\lambda(\hat{\lambda}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$ gilt, ist die Schätzerfolge $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots$ konsistent.

G30

a) Wir nehmen an, dass die Anzahl der defekten Sicherungen innerhalb der Stichprobe durch eine $B(n, p)$-verteilte Zufallsvariable Z beschrieben werden kann. Mit $c = u_{0.995} \approx 2.58$ erhält man mit der Formel

$$I(Y) = \left[\frac{1}{n + c^2}\left(Y + \frac{c^2}{2} - c\sqrt{\frac{Y(n-Y)}{n} + \frac{c^2}{4}}\right), \frac{1}{n + c^2}\left(Y + \frac{c^2}{2} + c\sqrt{\frac{Y(n-Y)}{n} + \frac{c^2}{4}}\right)\right]$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned} I(Z) &= \left[\tfrac{1}{500+2.58^2}\left(25 + \tfrac{2.58^2}{2} - 2.58\sqrt{\tfrac{25\cdot 475}{500} + \tfrac{2.58^2}{4}}\right), \tfrac{1}{500+2.58^2}\left(25 + \tfrac{2.58^2}{2} + 2.58\sqrt{\tfrac{25\cdot 475}{500} + \tfrac{2.58^2}{4}}\right)\right] \\ &= [0.0303, 0.0816] \end{aligned}$$

b) Sei z die Anzahl der defekten Sicherungen in der gezogenen Stichprobe. Dann ist die Länge L des konkreten Schätzintervalls gleich $L = \frac{2c}{n+c^2} \cdot \sqrt{\frac{z\cdot(n-z)}{n} + \frac{c^2}{4}}$ mit $c = u_{0.995}$. Laut Buch (S. 123 oben, Auflage

1992) gilt $\frac{z}{n}\left(1-\frac{z}{n}\right) \leq \frac{1}{4}$ und somit $z \cdot (1-\frac{z}{n}) = \frac{z(n-z)}{n} \leq \frac{n}{4}$ für $z \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L &\leq \frac{2c}{n+c^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{4} + \frac{c^2}{4}} \overset{!}{\leq} 0.05 \\ &\implies \frac{c}{\sqrt{n+c^2}} \leq 0.05 \\ &\implies c^2 \leq 0.05^2 \cdot (n+c^2) \implies 399 \cdot c^2 \leq n \end{aligned}$$

Mit $c = 2.58$ ergibt sich somit $n \geq 2656$.

H28

a) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch:

$$L(\theta_1, \theta_2; x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2^n} \cdot e^{-\frac{1}{\theta_2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)} & \text{für } \theta_1 \leq \min\{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Mit $\tilde{x}_1 := \min\{x_1, \dots, x_n\}$ gilt für alle $\theta_2 > 0$ und alle $\theta_1 \leq \tilde{x}_1$:

$$L(\theta_1, \theta_2; x_1, \dots, x_n) \leq \frac{1}{\theta_2^n} \cdot e^{-\frac{1}{\theta_2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_1)} = L(\tilde{x}_1, \theta_2, x_1, \dots, x_n)$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} &\ln L(\tilde{x}_1, \theta_2; x_1, \dots, x_n) = -n \cdot \ln \theta_2 - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_1) \\ \implies &(\ln L(\tilde{x}_1, \theta_2; x_1, \dots, x_n))' = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_1) \overset{!}{=} 0 \\ \iff &\theta_2 = \bar{x}_{(n)} - \tilde{x}_1 \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung zeigt, dass $\bar{x}_{(n)} - \tilde{x}_1$ in der Tat Minimalstelle ist. Also ist

$$\left(\min\{X_1, \dots, X_n\}\ ,\ \bar{X}_{(n)} - \min\{X_1, \dots, X_n\}\right)^T =: (\hat{\theta}_{1,n}; \hat{\theta}_{2,n})^T$$

ein M-L-Schätzer für $(\theta_1, \theta_2)^T$.

b) Offenbar gilt $X_1 - \theta_1 \sim Ex(\frac{1}{\theta_2})$.
Die Verteilungsfunktion $F_{\tilde{X}}$ von $\tilde{X} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ist dann:

$$F_{\theta_1, \theta_2, \tilde{X}}(x) \overset{(*)}{=} 1 - (1 - F_{\theta_1, \theta_2, X_1}(x))^n = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{n}{\theta_2}(x - \theta_1)} & \text{für } x \geq \theta_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

d.h. $\tilde{X} - \theta_1 \sim Ex(\frac{n}{\theta_2})$. Dann folgt mit

$$\begin{aligned} E_{\theta_1, \theta_2}(X_1) &= \theta_1 + E_{\theta_1, \theta_2}(X_1 - \theta_1) = \theta_1 + \theta_2 \\ E_{\theta_1, \theta_2}(\tilde{X}) &= \theta_1 + E_{\theta_1, \theta_2}(\tilde{X} - \theta_1) = \theta_1 + \frac{\theta_2}{n} \end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned} E_{\theta_1, \theta_2}(\hat{\theta}_{1,n}) &= \theta_1 + \frac{\theta_2}{n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \theta_1, \\ E_{\theta_1, \theta_2}(\hat{\theta}_{2,n}) &= \theta_1 + \theta_2 - \left(\theta_1 + \frac{\theta_2}{n}\right) = \theta_2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \theta_2 \end{aligned}$$

d.h beide Schätzer sind asymptotisch erwartungstreu.
$(*)$ Es gilt:

$$\begin{aligned} F_{\tilde{X}}(x) &= P(\tilde{X} \leq x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x) = 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x)^n = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n \end{aligned}$$

H29

Konfidenzintervalle bei Normalverteilungsannahme:

a)

$$\begin{aligned} I(x_1,\ldots,x_n) &= \left[\bar{x} - t_{160;0.975}\cdot\sqrt{\tfrac{s^2}{n}}\ ;\ \bar{x} + t_{160;0.975}\cdot\sqrt{\tfrac{s^2}{n}}\right] \\ &= \left[53.68 - 1.9749\cdot\sqrt{\tfrac{6.13^2}{161}}\ ;\ 53.68 + 1.9749\cdot\sqrt{\tfrac{6.13^2}{161}}\right] \\ &= [52.726\ ;\ 54.634] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} I(x_1,\ldots,x_n) &= \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{160;0.975}}\ ;\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{160;0.025}}\right] = \left[\frac{160\cdot 6.13^2}{196.918}\ ;\ \frac{160\cdot 6.13^2}{126.866}\right] \\ &= [30.532\ ;\ 47.391] \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} I(x_1,\ldots,x_n) &= \left[\bar{x} - u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[53.68 - 1.96\cdot\frac{6.13}{\sqrt{161}}\ ;\ 53.68 + 1.96\cdot\frac{6.13}{\sqrt{161}}\right] \\ &= [52.733\ ;\ 54.627] \end{aligned}$$

H30

a) Die Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ sind nicht identisch verteilt (da z.B. $Var(X_k) = k\cdot\sigma^2$). Somit ist keines der in der Vorlesung behandelten Verfahren anwendbar. Mit dem Hinweis gilt jedoch, dass die Zufallsvariablen $\frac{X_k-\mu_0}{\sqrt{k\cdot\sigma^2}}$ unabhängig und identisch $N(0,1)$–verteilt sind und wir betrachten nun

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-\mu_0}{\sqrt{k\cdot\sigma^2}}\right)^2 = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k-\mu_0)^2}{k}\right)}_{=:\tilde{Q}_{(n)}}\cdot\frac{1}{\sigma^2}$$

Die Zufallsvariable $\frac{1}{\sigma^2}\tilde{Q}_{(n)}$ ist Summe von n Quadraten unabhängiger $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen und somit χ^2_n-verteilt. Analog zum Beweis von Satz 3.27 (Auflage 1992) ergibt sich:

$$1-\alpha = 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = P_\theta\left(\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}} \le \frac{1}{\sigma^2}\tilde{Q}_{(n)} \le \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P_\theta\left(\frac{\tilde{Q}_{(n)}}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{\tilde{Q}_{(n)}}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

Somit ist

$$I(x_1,\ldots,x_n) = \left[\frac{\tilde{Q}_{(n)}}{\chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}\ ,\ \frac{\tilde{Q}_{(n)}}{\chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

ein Konfidenzintervall für σ^2 zum Niveau $1-\alpha$.

b)

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{(X_k-15)^2}{k} = \frac{(-2.5)^2}{1}+\frac{(-1)^2}{2}+\frac{2^2}{3}+\frac{(-2)^2}{4}+\frac{1^2}{5}+\frac{(-4)^2}{6} = 11.95$$

$$\Longrightarrow I(x_1,\ldots,x_6) = \left[\frac{11.95}{12.59}\ ,\ \frac{11.95}{1.63}\right] = [0.9492\ ,\ 7.3313]$$

mit $\chi^2_{6;0.95} = 12.59$ und $\chi^2_{6;0.05} = 1.63$.