Lösungsvorschlag zur 9. Übung

G25

a) Es gilt: $Y \sim R(a,b) \implies E(Y) = \frac{a+b}{2}$, $Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$ d.h. für $\theta > 0$ gilt hier $E_\theta(X_i) = \frac{\theta}{2}$, $i \in \mathbb{N}$.

$$E_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) = E_\theta\left(\frac{2}{n}(X_1,\ldots,X_n)\right) = \frac{2}{n}(E_\theta(X_1)+\ldots+E_\theta(X_n)) = \frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2} = \theta$$

Somit ist T_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$.

b)

$$Var_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) = Var_\theta\left(\frac{2}{n}\cdot(X_1+\ldots+X_n)\right) = \frac{4}{n^2}\cdot(Var_\theta(X_1)+\ldots+Var_\theta(X_n)) = \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

c) $T_1, T_2, \ldots$ ist eine Folge erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$. Zudem gilt für $\theta > 0$ mit b):

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta^2}{3n} = 0$$

d.h. die Folge $T_1, T_2, \ldots$ ist konsistent für τ.

d)

$$\begin{aligned}E_\theta(\tilde{T}_n(X_1,\ldots,X_n)) &= E_\theta((T_n(X_1,\ldots,X_n))^2) = Var_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) + (E_\theta(T_n(X_1\ldots,X_n)))^2\\ &= \frac{\theta^2}{3n} + \theta^2 = \theta^2\left(1+\frac{1}{3n}\right)\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{T}_n$ nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$.

e) Aus Teil d) folgt: $E_\theta(\tilde{T}_n(X_1,\ldots,X_n)) = \theta^2\left(1+\frac{1}{3n}\right)$
Dann gilt:

$$\hat{T}_n(X_1,\ldots,X_n) := \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)}\cdot\tilde{T}_n(X_1,\ldots,X_n)$$

$$\begin{aligned}\implies E_\theta(\hat{T}_n(X_1,\ldots,X_n)) &= E_\theta\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)}\cdot\tilde{T}_n(X_1,\ldots,X_n)\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3n}}E_\theta(\tilde{T}_n(X_1,\ldots,X_n))\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3n}}\cdot\theta^2\cdot\left(1+\frac{1}{3n}\right)\\ &= \theta^2\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{T}_n(X_1,\ldots,X_n)$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$.

f) $Var_\theta(X_i) = \frac{\theta^2}{12}$, $i \in \mathbb{N}$
Da $\hat{T}_n(X_1,\ldots,X_n)$ aus Teil e) ein erwartungstreuer Schätzer für θ^2 ist, ist

$$T_n^*(X_1,\ldots,X_n) := \frac{1}{12}\cdot\hat{T}_n(X_1,\ldots,X_n)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $Var_\theta(X_i) = \frac{1}{12}\theta^2$.

G26

a) Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $c \in [0,1]$ gilt:

$$E_\theta(T^{(c)}) = c\cdot E_\theta(\bar{X}_{(n)}) + (1-c)\cdot E_\theta(\bar{Y}_{(n)}) = c\cdot\theta + (1-c)\cdot\theta = \theta$$

b) Wir wählen denjenigen Schätzer $T^{(c)}$, der die kleinste Varianz $Var_\theta(T^{(c)})$ besitzt (gleichmäßig in θ). Offenbar gilt:

$$Var_\theta(T^{(c)}) = c^2\cdot Var_\theta(\bar{X}_{(m)}) + (1-c)^2\cdot Var_\theta(\bar{Y}_{(n)}) = c^2\cdot\frac{\sigma_1^2}{m} + (1-c)^2\cdot\frac{\sigma_2^2}{n}$$

Minimalstelle ist:

$$c^* = \frac{\frac{\sigma_2^2}{n}}{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$$

d.h. wir wählen $T^{(c^*)}$ als Schätzer mit kleinster Varianz.

G27

a) Es muss für alle $\theta > 0$ gelten: $\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(x)\,dx = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(t)\,dt &= \int_0^\theta c(\theta)\cdot t\cdot(t-\theta)^2\,dt = c(\theta)\cdot\int_0^\theta t^3 - 2\theta t^2 + \theta^2 t\,dt \\ &= c(\theta)\cdot\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}\theta t^3 + \frac{1}{2}\theta^2 t^2\right)\Bigg|_0^\theta = c(\theta)\left(\frac{\theta^4}{4} - \frac{2}{3}\theta^4 + \frac{\theta^4}{2}\right) \\ &= c(\theta)\cdot\frac{\theta^4}{12} \stackrel{!}{=} 1 \implies c(\theta) = \frac{12}{\theta^4}\end{aligned}$$

b)

$$f_\theta'(t) = \frac{12}{\theta^4}\left(3t^2 - 4\theta t + \theta^2\right) = \frac{12}{\theta^4}(t-\theta)(3t-\theta) \stackrel{!}{=} 0 \implies t_1 = \theta,\, t_2 = \frac{\theta}{3}$$

$$\begin{aligned}f_\theta''(t) = \frac{12}{\theta^4}(6t - 4\theta) &\implies f_\theta''(t_1) = \frac{24}{\theta^3} > 0 \implies t_1 \text{ ist Minimum} \\ &\implies f_\theta''(t_2) = -\frac{24}{\theta^3} < 0 \implies t_2 \text{ ist Maximum}\end{aligned}$$

Somit ist $Mod_\theta(X) = \frac{\theta}{3}$

c)

$$\begin{aligned}E_\theta(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f_\theta(t)\,dt = \frac{12}{\theta^4}\cdot\int_0^\theta t^4 - 2\theta t^3 + \theta^2 t^2\,dt = \frac{12}{\theta^4}\cdot\left(\frac{t^5}{5} - \frac{1}{2}\theta t^4 + \frac{\theta^2}{3}\cdot t^3\right)\Bigg|_0^\theta \\ &= \frac{12}{\theta^4}\left(\frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^5}{2} + \frac{\theta^5}{3}\right) = \frac{2}{5}\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_\theta(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_\theta(t)\,dt = \frac{12}{\theta^4}\cdot\int_0^\theta t^5 - 2\theta t^4 + \theta^2 t^3\,dt = \frac{12}{\theta^4}\left(\frac{t^6}{6} - \frac{2}{5}\theta t^5 + \frac{\theta^2}{4}t^4\right)\Bigg|_0^\theta \\ &= \frac{12}{\theta^4}\left(\frac{\theta^6}{6} - \frac{2}{5}\theta^6 + \frac{\theta^6}{4}\right) = \frac{1}{5}\theta^2\end{aligned}$$

$$Var_\theta(X) = E_\theta(X^2) - (E_\theta(X))^2 = \frac{\theta^2}{5} - \frac{4}{25}\theta^2 = \frac{\theta^2}{25}$$

d)

$$E_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) = E_\theta\left(\frac{5}{6n}(X_1+\ldots+X_n)\right) = \frac{5}{6n}(E_\theta(X_1)+\ldots+E_\theta(X_n)) = \frac{5}{6n}\cdot n\cdot\frac{2}{5}\theta = \frac{\theta}{3}$$

Somit ist T_n ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = Mod_\theta(X) = \frac{\theta}{3}$.

e)

$$\begin{aligned}Var_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) &= Var_\theta\left(\frac{5}{6\,n}(X_1+\ldots+X_n)\right) = \frac{25}{36\,n^2}\cdot(Var_\theta(X_1)+\ldots+Var(X_n)) \\ &= \frac{25}{36\,n^2}\cdot n\cdot\frac{\theta^2}{25} = \frac{\theta^2}{36\,n}\end{aligned}$$

Nach Teil d) ist T_n erwartunsgtreu für $\tau(\theta) = \frac{\theta}{3}$. Aus

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta(T_n(X_1,\ldots,X_n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{\theta^2}{36\,n} = 0$$

folgt die Konsistenz der Schätzerfolge $T_1, T_2, \ldots$ für τ.

H25

a)

$$\begin{aligned}E_\theta(X_1) &= \int_0^\theta x\cdot\frac{2x}{\theta^2}\,dx = \frac{2}{3}\theta \\ E_\theta(X_1^2) &= \int_0^\theta x^2\cdot\frac{2x}{\theta^2}\,dx = \frac{1}{2}\theta^2 \\ \implies Var_\theta(X_1) &= \frac{1}{2}\theta^2 - \left(\frac{2}{3}\theta\right)^2 = \frac{1}{18}\theta^2\end{aligned}$$

b)

$$E_\theta(T_n) = E_\theta(X_1) = \frac{2}{3}\theta \neq \theta \text{ für } \theta > 0$$

d.h. T_n ist nicht erwartungstreu, offensichtlich auch nicht asymptotisch erwartungstreu.

c) Betrachte $\tilde{T}_n := \frac{3}{2}T_n = \frac{3}{2}\bar{X}_{(n)}$. Offenbar gilt $E_\theta(\tilde{T}_n) = \theta$ für alle $\theta > 0$, d.h. $\tilde{T}_n$ ist erwartungstreu.

d) Weiter ist

$$Var_\theta(\tilde{T}_n) = \frac{9}{4}Var_\theta(\bar{X}_{(n)}) = \frac{9}{4n}Var_\theta(X_1) = \frac{9}{4\,n}\cdot\frac{\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{8n}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta(\tilde{T}_n) = 0$$

Zusammen mit der Erwartungstreue liefert dies die Konsistenz.

H26

$$\begin{aligned}
X_i \sim R(\theta, k\cdot\theta) \implies E_\theta(X_i) &= \frac{\theta + k\cdot\theta}{2} = \frac{k+1}{2}\cdot\theta \\
Var_\theta(X_i) &= \frac{(k\theta-\theta)^2}{12} = \frac{(k-1)^2}{12}\cdot\theta^2 \\
\implies E_\theta(\bar{X}) = E_\theta(X_i) &= \frac{(k+1)}{2}\theta \\
Var_\theta(\bar{X}) = \frac{1}{n}\cdot Var_\theta(X_i) &= \frac{1}{n}\cdot\frac{(k-1)^2}{12}\cdot\theta^2
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
E_\theta(T_n) &= \frac{4}{(k+1)^2}\cdot E_\theta(\bar{X}^2) = \frac{4}{(k+1)^2}(Var_\theta(\bar{X}) + E_\theta(\bar{X})^2) \\
&= \frac{4}{(k+1)^2}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{(k-1)^2}{12}\cdot\theta^2 + \frac{(k+1)^2}{4}\cdot\theta^2\right) \\
&= \theta^2\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{(k-1)^2}{3(k+1)^2} + 1\right)
\end{aligned}$$

Bias:

$$E_\theta(T_n) - \theta^2 = \theta^2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{(k-1)^2}{3(k+1)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

b) Mit $a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{(k-1)^2}{3(k+1)^2} + 1$ ist $\tilde{T}_n := \frac{1}{a_n}\cdot T_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$, da

$$E_\theta(\tilde{T}_n) = \frac{1}{a_n}\cdot E_\theta(T_n) = \frac{1}{a_n}\cdot\theta^2\cdot a_n = \theta^2.$$

H27

a)

$$\begin{aligned}
E_\theta(\tilde{T}_n(X_1,\dots,X_n)) &= E_\theta\left(\frac{5}{3n(n+1)}\cdot\sum_{i=1}^n i\cdot X_i\right) = \frac{5}{3n(n+1)}\cdot\sum_{i=1}^n i\cdot E_\theta(X_i) \\
&= \frac{5}{3n(n+1)}\cdot\frac{2}{5}\theta\cdot\sum_{i=1}^n i = \frac{5}{3n(n+1)}\cdot\frac{2}{5}\theta\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{\theta}{3} = Mod_\theta(X)
\end{aligned}$$

Also ist auch $\tilde{T}_n$ erwartungstreu für $\tau(\theta) = Mod_\theta(X)$.

b)

$$\begin{aligned}
Var_\theta(\tilde{T}_n(X_1,\dots,X_n)) &= Var_\theta\left(\frac{5}{3n(n+1)}\cdot\sum_{i=1}^n i\cdot X_i\right) = \frac{25}{9n^2(n+1)^2}\cdot\sum_{i=1}^n Var_\theta(i\cdot X_i) \\
&= \frac{25}{9n^2(n+1)^2}\cdot\sum_{i=1}^n i^2\cdot Var_\theta(X_i) = \frac{25}{9n^2(n+1)^2}\cdot\frac{\theta^2}{25}\cdot\sum_{i=1}^n i^2 \\
&= \frac{\theta^2}{9n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(2n+1)\cdot\theta^2}{54n(n+1)}
\end{aligned}$$

$\tilde{T}_n$ ist nach a) erwartungstreu für $\tau(\theta) = \frac{\theta}{3}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta(\tilde{T}_n(X_1, \dots, X_n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\theta^2}{54n^2 + 54n} = 0$$

Somit ist die Schätzerfolge $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots$ konsistent.

c) Ein geeignetes Vergleichskriterium ist der <u>erwartete quadratische Fehler</u>. Für erwartungstreue Schätzer ist dieser gleich der Varianz des Schätzers:

$$Var_\theta(T_n(X_1, \dots, X_n)) = \frac{\theta^2}{36n}, \; Var_\theta(\tilde{T}_n(X_1, \dots, X_n)) = \frac{2n+1}{54n(n+1)}\theta^2$$

$$Var_\theta(T_n) < Var_\theta(\tilde{T}_n) \iff 54(n+1) < 36(2n+1) \iff 54n + 54 < 72n + 36 \iff 1 < n$$

$\implies$ Für $n = 1$ sind T_n und $\tilde{T}_n$ identisch, für $n \geq 2$ ist T_n besser.