Lösungsvorschlag zur 8. Übung

G22

a) Wir verwenden für das „Ziehen ohne Zurücklegen“ die hypergeometrische Verteilung. Die Zufallsvariable X beschreibe hierbei die Anzahl der Speichermodule mit doppelter Speicherkapazität in der Stichprobe: $X \sim H(40, 450, 9)$. Dann gilt:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \frac{\binom{9}{0} \cdot \binom{450-9}{40-0}}{\binom{450}{40}} - \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{450-9}{40-1}}{\binom{450}{40}} = 1 - \frac{441! \cdot 410!}{401! \cdot 450!} - \frac{9 \cdot 441! \cdot 40 \cdot 410!}{402! \cdot 450!}$$
$$\approx 1 - 0.42925 - 0.38440 = 0.18635$$

b) X ist näherungsweise $B(40; \frac{9}{450}) = B(40; 0.02)$-verteilt.

$$P(X \geq 2) = 1 - \binom{40}{0} \cdot 0.02^0 \cdot 0.98^{40} - \binom{40}{1} \cdot 0.02^1 \cdot 0.98^{39} \approx 1 - 0.44570 - 0.36384 = 0.19046$$

c) $\lambda = n \cdot p = 40 \cdot 0.02 = 0.8$

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{0.8^0}{0!} \cdot e^{-0.8} - \frac{0.8^1}{1!} \cdot e^{-0.8} \approx 1 - 0.44933 - 0.35946 = 0.19121$$

G23

$$\begin{aligned} &X \sim R(10; 14) && \Rightarrow E(X) = 12, \quad Var(X) = \tfrac{4}{3} \\ &Y \sim Ex(2) && \Rightarrow E(Y) = \tfrac{1}{2}, \quad Var(Y) = \frac{1}{4} \\ &Z \sim P(6) && \Rightarrow E(Z) = 6, \quad Var(Z) = 6 \end{aligned}$$

Nach dem ZGS gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(U_1 + \ldots + U_n \leq x) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{U_1 + \ldots + U_n - n \cdot E(U)}{\sqrt{n \cdot Var(U)}} \leq \frac{x - n \cdot E(U)}{\sqrt{n \cdot Var(U)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - n \cdot E(U)}{\sqrt{n \cdot Var(U)}}\right) \end{aligned}$$

mit

$$E(U) = E(XY - Z) = E(XY) - E(Z) \overset{(*)}{=} E(X) \cdot E(Y) - E(Z) = 12 \cdot \frac{1}{2} - 6 = 0$$

$(*)$ da X und Y unabhängig sind

$$\begin{aligned} Var(U) &= E\left(U^2\right) - \underbrace{(E(U))^2}_{=0} = E\left((XY - Z)^2\right) = E\left(X^2Y^2 - 2 \cdot XYZ + Z^2\right) \\ &= E\left(X^2Y^2\right) - 2E(XYZ) + E\left(Z^2\right) \overset{(**)}{=} E\left(X^2\right) \cdot E\left(Y^2\right) - 2 \cdot E(X)\, E(Y)\, E(Z) + E\left(Z^2\right) \\ &= (Var(X) + (E(X))^2) \cdot (Var(Y) + (E(Y))^2) - 2 \cdot E(X)\, E(Y)\, E(Z) + (Var(Z) + (E(Z))^2) \\ &= \left(\frac{4}{3} + 12^2\right)\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 + (6 + 6^2) = \frac{436}{3} \cdot \frac{1}{2} - 72 + 42 \\ &= \frac{218}{3} - 72 + 42 = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

$(**)$ da X, Y und Z unabhängig sind, und da auch X^2 und Y^2 unabhängig sind.

$$P(U_1 + \ldots + U_n \leq \sqrt{n}) = P\left(\frac{U_1 + \ldots + U_n - n \cdot E(U)}{\sqrt{n \cdot Var(U)}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot \frac{128}{3}}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(U_1 + \ldots + U_n \leq \sqrt{n}) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{3}}}\right) = \Phi(0.153) = 0.561$$

G24

Nullhypothese: $F = F_0$
mit

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Exponentialverteilung mit } \lambda = \frac{1}{2}$$

Wert der Testgröße :

$$D_{50}(x_1, ..., x_{50}) = \max\left\{\left|\tfrac{27}{50} - F_0(2.725)\right|, \left|\tfrac{28}{50} - F_0(2.725)\right|\right\} = \max\{0.204\ ;\ 0.184\} = 0.204$$

Sei K die Kolmogoroffsche Verteilungsfunktion. Dann gilt laut Tabelle im Buch:

$$K(\sqrt{n} \cdot d^*) = 0.95 \Rightarrow \sqrt{n} \cdot d^* = 1.36 \Rightarrow d^* = \frac{1.36}{\sqrt{50}} = 0.1923$$

Die Hypothese ist zu verwerfen, da $D_{50}(x_1, ..., x_{50}) = 0.204 > 0.1923 = d^*$.
Man wird nichts gegen die Nullhypothese H_0 einwenden genau dann, wenn

$$d^* \geq D_{50}(x_1, ...x_{50}) = 0.204 \Leftrightarrow \sqrt{n} \cdot d^* \geq \sqrt{n} \cdot 0.204 = \sqrt{50} \cdot 0.204 \approx 1.4425$$

also wegen $K(1.4425) = 0.9688$ genau dann, wenn

$$\alpha \leq 1 - K(1.4425) = 0.0312$$

gilt.

H22

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der fehlerfreien Kleidungsstücke. Dann gilt: $X \sim B(420; 0.92)$

a)

$$P(X \leq 400) \overset{ZGS}{\approx} \Phi\left(\frac{400 + 0.5 - 420 \cdot 0.92}{\sqrt{420 \cdot 0.92 \cdot 0.08}}\right) \approx \Phi(2.536) \approx 0.994$$

b) Sei n die Anzahl der produzierten Kleidungsstücke. Dann gilt $X \sim B(n; 0.92)$. Wir fordern nun: $P(X \leq 400) \geq 0.95$

$$P(X \leq 400) \approx \Phi\left(\frac{400 + 0.5 - n \cdot 0.92}{\sqrt{n \cdot 0.92 \cdot 0.08}}\right) = \Phi\left(\frac{400.5 - n \cdot 0.92}{\sqrt{n \cdot 0.0736}}\right)$$

Somit:

$$\begin{aligned}
&\frac{400.5 - n \cdot 0.92}{\sqrt{n \cdot 0.0736}} \geq u_{0.95} \approx 1.64 \Rightarrow 400.5 - n \cdot 0.92 \geq 0.445 \cdot \sqrt{n} \\
&\Rightarrow 0.92n + 0.445\sqrt{n} - 400.5 \leq 0 \qquad \text{(nun quadratische Ergänzung)} \\
&\Rightarrow \left(\sqrt{0.92}\sqrt{n} + \frac{0.445}{2\sqrt{0.92}}\right)^2 \leq \left(\frac{0.445}{2\sqrt{0.92}}\right)^2 + 400.5 \\
&\Rightarrow \sqrt{0.92}\sqrt{n} + \frac{0.445}{2\sqrt{0.92}} \leq \sqrt{\frac{0.445^2}{4 \cdot 0.92} + 400.5} \\
&\Rightarrow \sqrt{n} \leq \left(\sqrt{\frac{0.445^2}{4 \cdot 0.92} + 400.5} - \frac{0.445}{2 \cdot \sqrt{0.92}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{0.92}} \approx 20.624 \\
&\Rightarrow n \leq 425.35 \leq 426
\end{aligned}$$

H23

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2 \qquad i = 1, ..., n$

$E\left(\bar{X}_{(n)}\right) = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

$Var(\bar{X}_{(n)}) = \frac{1}{n^2} \cdot Var(\sum_{i=1}^n X_i) \overset{(*)}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$
$(*)$ da $X_1, ..., X_n$ unabhängig sind

Da $X_1, ..., X_n$ alle unabhängig und normalverteilt sind, gilt $\bar{X}_{(n)} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P(\mu - \epsilon \leq \bar{X}_{(n)} \leq \mu + \epsilon) &= \Phi\left(\frac{\mu + \epsilon - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \epsilon - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot \epsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n} \cdot \epsilon}{\sigma}\right) \\
&= 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot \epsilon}{\sigma}\right) - 1
\end{aligned}$$

ϵ	n	$\frac{\sqrt{n}\cdot\epsilon}{\sigma}$	$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\epsilon}{\sigma}\right)$	$2\cdot\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\epsilon}{\sigma}\right)-1$
1.0	10	1.00	0.8413	0.6826
1.0	20	1.41	0.9207	0.8414
1.0	50	2.24	0.9875	0.9750
1.0	100	3.16	0.9993	0.9986
0.1	10	0.10	0.5040	0.0080
0.1	20	0.14	0.5557	0.1114
0.1	50	0.22	0.5871	0.1742
0.1	100	0.32	0.6255	0.2510

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_{(n)} - \mu| \leq \epsilon) = \lim_{n\to\infty} P(\mu - \epsilon \leq \bar{X}_{(n)} \leq \mu + \epsilon) = 1$$

Somit konvergiert die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit zunehmendem n gegen 1, unabhängig von der Wahl des $\epsilon > 0$.

H24

Wir betrachten die geordnete Messreihe:

$$357, 640, 691, 726, 784, 822, 855, 943, 962, 997$$

Dann gilt für die empirische Verteilungsfunktion:

$$F_{10}(x) = \begin{cases} 0 & x < 357 \\ \frac{1}{10} & 357 \leq x < 640 \\ \frac{2}{10} & 640 \leq x < 691 \\ \frac{3}{10} & 691 \leq x < 726 \\ \frac{4}{10} & 726 \leq x < 784 \\ \frac{5}{10} & 784 \leq x < 822 \\ \frac{6}{10} & 822 \leq x < 855 \\ \frac{7}{10} & 855 \leq x < 943 \\ \frac{8}{10} & 943 \leq x < 962 \\ \frac{9}{10} & 962 \leq x < 997 \\ 1 & 997 \leq x \end{cases}$$

Zu prüfende Hypothese: f_X ist die vermutete Dichtefunktion für die Beschreibung der Lebensdauer. Es gilt

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 10^{-9} \cdot x^3 & \text{für } 0 \leq x \leq 1000 \\ 1 & \text{für } x > 1000 \end{cases}$$

An den Sprungstellen der empirischen Verteilungsfunktion benötigt man die Werte von F_X um $D_{10}(x_1, .., x_{10})$ zu berechnen. Es bezeichne $d(x) = \max\{|F_{10}(x-0) - F_X(x)|, |F_{10}(x) - F_X(x)|\}$. Dann erhält man:

x	357	640	691	726	784	822	855	943	962	997
$F_{10}(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	1
$F_X(x)$	0.045	0.262	0.330	0.383	0.482	0.555	0.625	0.839	0.890	0.991
$d(x)$	0.055	0.162	0.130	0.083	0.082	0.055	0.075	0.139	0.090	0.091

$$\Longrightarrow D_{10}(x_1, ...x_{10}) = \sup_{z\in\mathbb{R}} |F_{10}(z, x_1, ..., x_{10}) - F_X(z)| = \max_{1\leq i\leq 10} d(x_i) = 0.162$$

Die Hypothese wird nun zum Niveau 0.05 abgelehnt, falls $D_{10}(x_1, ..., x_{10})$ zu groß ist, d.h. falls $D_{10}(x_1, ..., x_{10}) > \frac{1.36}{\sqrt{10}}$ gilt. Da $0.162 < \frac{1.36}{\sqrt{10}}$ gilt, wird die Hypothese dass f_X die Dichtefunktion der Lebensdauer ist nicht abgelehnt.