Lösungsvorschlag zur 7. Übung

G19

$X_i =$ „Durchmesser der i-ten Praline“, $\quad i = 1, \ldots, n$
Es gilt: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt mit

$$E(X_i) = 25 \quad \text{und} \quad Var(X_i)$$

$$\Longrightarrow \; E\left(\bar{X}_{(n)}\right) = 25, \quad Var\left(\bar{X}_{(n)}\right) = \frac{4}{n}$$

Gesucht ist nun n, so dass gilt:

$$P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - 25\right| < 0.5\right) \geq 0.99$$

a) Tschebyscheff-Ungleichung liefert: $P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - 25\right| < 0.5\right) \geq 1 - \frac{Var\left(\bar{X}_{(n)}\right)}{0.5^2} = 1 - \frac{4}{n \cdot \frac{1}{4}}$
Wähle n so, dass $1 - \frac{16}{n} \geq 0.99 \Longrightarrow n \geq \frac{16}{0.01} = 1600$

b) Zentraler Grenzwertsatz: $P\left(\left|\bar{X}_{(n)} - 25\right| < 0.5\right) = P\left(-\frac{0.5}{\sqrt{\frac{4}{n}}} \leq \frac{\bar{X}_{(n)} - 25}{\sqrt{\frac{4}{n}}} \leq \frac{0.5}{\sqrt{\frac{4}{n}}}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right)$
$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 \geq 0.99$
$\Longrightarrow \; \frac{\sqrt{n}}{4} \geq u_{0.995}$
$\Longrightarrow \; n \geq 16 \cdot u_{0.995}^2 \approx 106.5$

G20

a) Wegen $\begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix}$ normal-verteilt. Folglich sind $X+Y$ und $X-Y$ genau dann unabhängig, wenn $X+Y$ und $X-Y$ unkorreliert sind. Es gilt $E((X+Y)\cdot(X-Y)) = E\left(X^2\right) - E\left(Y^2\right)$. Somit

$$\begin{aligned} Cov((X+Y),(X-Y)) &= E\left(X^2\right) - E\left(Y^2\right) - E(X+Y) \cdot E(X-Y) \\ &= E\left(X^2\right) - E\left(Y^2\right) - (E(X))^2 + (E(Y))^2 \\ &= Var(X) - Var(Y), \end{aligned}$$

d.h. $X+Y$ und $X-Y$ sind genau dann unkorreliert, wenn $Var(X) = Var(Y)$ gilt.

b) Seien $X_1, \ldots, X_{r+s}$ unabhängig, identisch $N(0,1)$-verteilt. Nach Definition der χ^2-Verteilung gilt dann

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2 \leq x\right) \cdot P\left(\sum_{i=r+1}^{r+s} X_i^2 \leq y\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2 \leq x, \sum_{i=r+1}^{r+s} X_i^2 \leq y\right) \end{aligned}$$

das heisst (X,Y) besitzt dieselbe Verteilung wie $\left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2, \sum_{i=r+1}^{r+s} X_i^2\right)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq z) &= P((X,Y) \in \{(x,y) : x+y \leq z\}) \\ &= P\left(\left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2, \sum_{i=r+1}^{r+s} X_i^2\right) \in \{(x,y) : x+y \leq z\}\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{r+s} X_i^2 \leq z\right) \end{aligned}$$

das heisst $X+Y$ ist verteilt wie $\sum_{i=1}^{r+s} X_i^2$ und somit ist $X+Y$ χ^2_{r+s}-verteilt.

G21

a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es bezeichne

$$B_N = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \;\; \forall n \geq N\}$$

und entsprechend

$$B_N^C = \{\omega \in \Omega : \exists n \geq N \text{ mit } |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Dann ist $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Mengen und es gilt:

$$A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i =: B$$

mit $P(A) = 1$ laut Voraussetzung. Somit gilt mit der Monotonie des Wahrscheinlichkeitsmasses $P(B) \geq P(A) = 1$, d.h. $P(B) = 1$. Mit dem Hinweis aus dem Aufgabentext für aufsteigende Folgen gilt nun $P(B_N) \to 1$ und somit auch $P(B_N^C) \to 0$. Damit erhält man nun

$$P(|X_N - X| \geq \varepsilon) \leq P(B_N^C) \to 0.$$

b) Sind $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängig, identisch verteilt mit Erwartungswert μ, dann setze $X_n = \bar{Y}_{(n)}$ und $X = \mu$.

H19

a) Es gilt: $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2_{(n)} \sim \chi^2_{n-1} \implies Z := \frac{20}{21} \cdot S^2_{(21)} \sim \chi^2_{20}$

$$\begin{aligned}
P\left(S^2_{(21)} > 22\right) &= P\left(\frac{20}{21} S^2_{(21)} > \frac{20}{21} \cdot 22\right) = P(Z > 20.95) \\
&= 1 - P(Z \leq 20.95) = 1 - F_Z(20.95) \\
&= 1 - F_Z\left(\chi^2_{20;0.6}\right) = 1 - 0.6 = 0.4
\end{aligned}$$

b) Gesucht: $P\left(S^2_{(13)} > 1.06 \cdot \tilde{S}^2_{(7)}\right) = P\left(\frac{S^2_{(13)}}{\tilde{S}^2_{(7)}} > 1.06\right)$

Es gilt: $\frac{12}{\sigma^2} S^2_{(13)} \sim \chi^2_{12}$ und $\frac{6}{\sigma^2} \tilde{S}^2_{(7)} \sim \chi^2_6$

$\implies \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{12}{\sigma^2} \cdot S^2_{(13)}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{\sigma^2} \cdot \tilde{S}(7)} = \frac{S^2_{(13)}}{\tilde{S}^2_{(7)}} \sim F_{12,6}$

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{S^2_{(13)}}{\tilde{S}^2_{(7)}} > 1.06\right) &= 1 - P\left(\frac{S^2_{(13)}}{\tilde{S}^2_{(7)}} \leq \underbrace{1.06}_{=F_{12,6;0.5}}\right) \\
&= 1 - 0.5 = 0.5
\end{aligned}$$

H20

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der befragten Bürger, die die Partei A gewählt haben. Unter der Annahme der Unabhängigkeit gilt: $X \sim B(1200; 0.003)$

a)

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= \binom{1200}{0} \cdot 0.997^{1200} + \binom{1200}{1} \cdot 0.003 \cdot 0.997^{1199} + \binom{1200}{2} \cdot 0.003^2 \cdot 0.997^{1198} \\
&= 0.02718 + 0.09813 + 0.17702 \\
&= 0.30233
\end{aligned}$$

b) $\lambda = 1200 \cdot 0.003 = 3.6$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&\approx e^{-3.6} + 3.6 \cdot e^{-3.6} + \frac{3.6^2}{2!} \cdot e^{-3.6} \\
&= 0.30275
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(X \le 2) &\approx \Phi\left(\frac{2+0.5-1200\cdot 0.003}{\sqrt{1200\cdot 0.003\cdot 0.997}}\right)\\
&= \Phi(-0.581)\\
&= 1-\Phi(0.581)\\
&= 1-0.719\\
&= 0.281
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \le 2) &\approx \Phi\left(\frac{2-1200\cdot 0.003}{\sqrt{1200\cdot 0.003\cdot 0.997}}\right)\\
&= \Phi(-0.845)\\
&= 1-\Phi(0.845)\\
&= 1-0.801\\
&= 0.199
\end{aligned}
$$

H21

a) Laut Definition ist die Verteilung von Y symmetrisch zur 0 und Y^2 ist $F_{1,n}$-verteilt. Also gilt für $y > 0$

$$
\begin{aligned}
P(0 < Y \le y) &= \frac{1}{2}P(-y \le Y \le y)\\
&= \frac{1}{2}P(Y^2 \le y^2)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{y^2} f_{F_{1,n}}(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Wegen $f_{F_{1,n}}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot n^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(n+x)^{\frac{1+n}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-\frac{1+n}{2}}$ für $x > 0$, folgt

$$
\begin{aligned}
P(0 < Y \le y) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n}}\cdot\int_0^{y^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-\frac{1+n}{2}}dx\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n}}\cdot\int_0^{y}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{1+n}{2}}dx
\end{aligned}
$$

Als Dichte ergibt sich somit $f_{t_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n}}\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{1+n}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien U und V unabhängig χ^2_r- bzw. χ^2_s-verteilt. Laut Definition besitzt Z dieselbe Verteilung wie $\frac{\frac{1}{r}U}{\frac{1}{s}V}$, also $E(Z) = \frac{s}{r}E\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{s}{r}E(U)\cdot E\left(\frac{1}{V}\right) = s\cdot E\left(\frac{1}{V}\right)$. Ferner

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{V}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{s}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx\\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{s-2}{2}}\cdot 2\cdot\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)\cdot\frac{s-2}{2}}\cdot x^{\frac{s}{2}-2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx\\
&= \frac{1}{s-2}\int_0^\infty f_{\chi^2_{s-2}}(x)\,dx = \frac{1}{s-2}\,,
\end{aligned}
$$

somit $E(Z) = \frac{s}{s-2}$.

c) Offenbar gilt $E(Y) = 0$ (Symmetrie zu 0), also $Var(Y) = E\left(Y^2\right) = \frac{n}{n-2}$ nach b).

d) Für die Dichten von A und B gilt $f_A(x) = f_B(x) = \begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & \text{für } x > 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} = f_{\chi^2_2}(x)$ d.h. A und B sind unabhängige χ^2_2-verteilte Zufallsvariablen. Nach Definition gilt dann $\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}B} \sim F_{2,2}$.