Lösungsvorschlag zur 6. Übung

G16

a) Es gilt

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\,dt\,ds$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x & \text{für } 0\le x\le 1 \\ 1 & \text{für } x>1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y<0 \\ \frac{2}{3}y^2+\frac{1}{3}y & \text{für } 0\le y\le 1 \\ 1 & \text{für } y>1 \end{cases}$$

b) Betrachte z.B. den Punkt $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, dann gilt:

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq \frac{56}{81} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = f_X\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f_Y\left(\frac{1}{3}\right)$$

und da sowohl f als auch $f_X\cdot f_Y$ in $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ stetig sind, folgt dass X und Y <u>nicht</u> unabhängig sind. (vgl. Buch S.68, Bemerkung 5, Auflage von 1992)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & x<0 \\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3} & \text{für} & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{für} & x>1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für} & y<0 \\ \frac{4}{3}y+\frac{1}{3} & \text{für} & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{für} & y>1 \end{cases}$$

c) Berechnung der Covarianz $Cov(X,Y)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x\,dx = \frac{2}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2\Big|_0^1 = \frac{5}{9}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{4}{3}y^2+\frac{1}{3}y\,dy = \frac{4}{9}y^3+\frac{1}{6}y^2\Big|_0^1 = \frac{11}{18}$$

$$\begin{aligned} E(X\cdot Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{3}x^2y+\frac{4}{3}xy^2\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}x^2y^2+\frac{4}{9}xy^3\Big|_{y=0}^1\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}x^2+\frac{4}{9}x\,dx = \frac{1}{9}x^3+\frac{2}{9}x^2\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{1}{3}-\frac{5}{9}\cdot\frac{11}{18} = -\frac{1}{162} \approx -0.006173$$

Bemerkung: X und Y sind somit <u>nicht</u> unabhängig, da $Cov(X,Y)\neq 0$.

d)

$$P(X\le Y) = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\le y\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_x^1 \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}xy+\frac{2}{3}y^2\Big|_{y=x}^1\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x^2\,dx = \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

G17

a) Wir betrachten die Verteilung von $Z = X + Y$. Sei $B = \{(x, y) : x + y \leq z\}$, so gilt

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \iint\limits_B f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

und mit der Substitution von $u = x + y$ und $v = y$ erhält man

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u - v)\, f_Y(v)\, dv \right) du$$

und die Dichte von Z ergibt sich durch Ableiten des obigen Ausdrucks.

b) Für $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) = P(Y \leq z - X) = P((x, y) \in \{(x, y) : y \leq z - x\}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-s} f(s, t)\, dt\, ds \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f(s, t - s)\, dt\, ds = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t - s)\, ds\, dt &= \int_{-\infty}^{z} f_z(t)\, dt \\ \Longrightarrow\ f_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t - s)\, ds,\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Y_1 und Y_2 seien unabhängig, $Ex(\lambda_1)$- bzw. $Ex(\lambda_2)$-verteilte Zufallsvariablen. $X = Y_1 + Y_2$ beschreibe die Lebensdauer von S.

$$\Longrightarrow\ E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{und} \quad Var(X) = Var(Y_1) + Var(Y_2) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$$

Die 2-dimensionale Zufallsvariable (Y_1, Y_2) besitzt die Dichte

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y_2} & \text{für } y_1 > 0, y_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann erhält man mit b) als Dichte f_X von $X = Y_1 + Y_2$:

$$f_X(z) = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-x)}\, dx = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x}\, dx \qquad \text{für } z \geq 0$$

und $f_X(z) = 0 \quad$ für $z < 0$

<u>1. Fall:</u> $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\Longrightarrow\ f_X(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \lambda_1^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda_1 z} & \text{für } z \geq 0 \end{cases}$$

<u>2. Fall:</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Longrightarrow\ f_X(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z} \right) & \text{für } z \geq 0 \end{cases}$$

G18

a) $P(M \leq x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = (P(X_1 \leq x))^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^n & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases}$

$P(m \leq x) = 1 - P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - (P(X_1 > x))^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^n & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases}$

b) Aus Teil a) erhält man Dichten für M und m:

$$f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ n \cdot x^{n-1} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ n \cdot (1-x)^{n-1} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Somit ist

$$E(M) = \int_0^1 x \cdot n \cdot x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} \quad \text{und} \quad E(m) = \int_0^1 x \cdot n \cdot (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n+1}$$

c) Für $n = 2$ gilt: $M \cdot m = X_1 \cdot X_2 \implies E(M \cdot m) = E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{1}{4}$
und $Cov(M, m) = E(M \cdot m) - E(M)E(m) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$

H16

a) 1. Fall: $x \leq 0$ oder $y \leq 0$

$$\implies F(x, y) = 0$$

2. Fall: $0 < x < 1$ und $0 < y < 1$

$$\implies F(x,y) = \int_0^x \int_0^y t + s \, ds \, dt = \int_0^x t \cdot s + \frac{1}{2} s^2 \bigg|_{s=0}^{y} dt = \int_0^x t \cdot y + \frac{1}{2} y^2 \, dt$$
$$= \frac{1}{2} t^2 y + \frac{1}{2} y^2 t \bigg|_{t=0}^{x} = \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{2} x y^2 = \frac{1}{2} x \, y \, (x+y)$$

3. Fall: $0 < x < 1$ und $y \geq 1$

$$\implies F(x,y) = \int_0^1 \int_0^x t + s \, dt \, ds = F(x, 1) = \frac{1}{2} x(x+1)$$

4. Fall: $x \geq 1$ und $0 < y < 1$

$$\implies F(x,y) = \int_0^1 \int_0^y t + s \, ds \, dt = F(1, y) = \frac{1}{2} y(1+y)$$

5. Fall: $x \geq 1$ und $y \geq 1$

$$\implies F(x, y) = 1$$

$$\implies F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ oder } y \leq 0 \\ \frac{1}{2} xy(x+y) & \text{für } 0 < x, y < 1 \\ \frac{1}{2} x(x+1) & \text{für } 0 < x < 1, y \geq 1 \\ \frac{1}{2} y(1+y) & \text{für } x \geq 1, 0 < y < 1 \\ 1 & \text{für } x, y \geq 1 \end{cases}$$

Randverteilungen:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} x(x+1) & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \\ \frac{1}{2}y(1+y) & \text{für } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

<u>Randdichten:</u>

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\,dt = \int_0^1 s+t\,dt = s\cdot t + \frac{1}{2}t^2\Big|_{t=0}^{1} = s + \frac{1}{2} \quad \text{für } 0 < s < 1$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\,ds = \int_0^1 s+t\,ds = \frac{1}{2}s^2 + t\cdot s\Big|_{s=0}^{1} = \frac{1}{2} + t \quad \text{für } 0 < t < 1$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + y & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\Longrightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

Wegen $f_X(x) = f_Y(x)$ gilt $E(Y) = \frac{7}{12}, Var(Y) = \frac{11}{144}$

$$E(X\cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 x\,y\,(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x\,y^3\Big|_{y=0}^{1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\,dx = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12} = -\frac{1}{144}$$

$$\varrho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}$$

Da $Cov(X,Y) = -\frac{1}{144} \neq 0$ ist, sind X und Y <u>nicht</u> unabhängig.

c)

$$P(X+Y\leq 1) = \iint_{\{s+t<1\}} f(s,t)\,dt\,ds = \int_0^1\int_0^{1-s} s+t\,dt\,ds = \int_0^1 s\cdot t + \frac{1}{2}t^2\Big|_{t=0}^{1-s}\,ds$$

$$= \int_0^1 s(1-s) + \frac{1}{2}(1-s)^2\,ds = \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s^2\,ds = \frac{1}{2}s - \frac{1}{6}s^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

H17

a)

$$E(\hat{J}_1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(g(X_i)) = E(g(X_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_{X_1}(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = J$$

$$E(\hat{J}_2) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(E(g(X_i)) + E(g(1-X_i))) = \frac{1}{2}(E(g(X_1)) + E(g(1-X_1)))$$

$$= \frac{1}{2}\left(J + \int_0^1 g(1-x)\,dx\right) = J$$

b) Da die Zufallsvariablen X_i unabhängig sind, gilt

$$Var(\hat{J}_1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(g(X_i)) = \frac{1}{n}Var(g(X_1))$$

$$Var(\hat{J}_2) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(g(X_i) + g(1-X_i)) = \frac{1}{4n}Var(g(X_1) + g(1-X_1))$$

Ferner gilt

$$E(g^2(X_1)) = \int_0^1 g^2(x)dx = \int_0^1 g^2(1-x)dx = E(g^2(1-X_1))$$

und somit

$$\begin{aligned}
Var(g(X_1) + g(1-X_1)) &= E((g(X_1) + g(1-X_1))^2) - (E(g(X_1)) + E(g(1-X_1)))^2 \\
&= 2E(g^2(X_1)) + 2E(g(X_1)g(1-X_1)) - 4J^2 \\
&= 2E(g^2(X_1)) + 2\int_0^1 g(x)g(1-x)dx - 4J^2 \\
&= 4E(g^2(X_1)) - 2\int_0^1 g^2(x) - g(x)g(1-x)dx - 4J^2 \\
&= 4E(g^2(X_1)) - \underbrace{\int_0^1 (g(x) - g(1-x))^2 dx}_{\geq 0} - 4J^2 \\
&\leq 4\,E(g^2(X_1)) - 4J^2 = 4\,Var(g(X_1)) \\
&\implies Var(\hat{J}_2) \leq \frac{1}{n}Var(g(X_1)) = Var(\hat{J}_1)
\end{aligned}$$

H18

a)

$$P(S=i, W=j) = P(S=i, W=j, R=3-i-j) = \binom{3}{i}\binom{3-i}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{3-i-j}$$

$$= \frac{3!}{i!(3-i)!}\cdot\frac{(3-i)!}{j!(3-i-j)!}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{3-i-j} = \frac{3!}{i!j!(3-i-j)!}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{3-i-j}$$

Tabelle für $P(S=i, W=j)$:

i \ j	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	0
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{24}$	0	0
3	$\frac{1}{216}$	0	0	0

b) Es gilt $S \sim B(3, \frac{1}{6})$ und $W \sim B(3, \frac{1}{2})$

$$\Longrightarrow E(S) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \qquad Var(S) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$
$$E(W) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad Var(W) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
$$E(S \cdot W) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} ijP(S = i, W = j) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$$

Somit gilt

$$Cov(S, W) = E(S \cdot W) - E(S) \cdot E(W) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$
$$\varrho(S, W) = \frac{Cov(S, W)}{\sqrt{Var(S) \cdot Var(W)}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{16}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -0.4472$$

c) Falls W einen großen Wert annimmt, muß R wegen $R = 3 - S - W$ einen kleinen Wert annehmen. Daher muß die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient von W und R negativ sein. (Es gilt $Cov(W, R) = -\frac{1}{2}$ und $\varrho(W, R) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$)