Lösungsvorschlag zur 5. Übung

G13

a) Gesucht ist eine Toleranz s für den Fehler der Ablaufzeit einer Parkuhr, so dass für eine $N(60;4)$-verteilte Zufallsvariable X die Bedingung $P(|X-60|>s)=0.15$ erfüllt ist.

Standardisierung von X liefert

$$\begin{aligned} P(|X-60|>s) &= 1-P(|X-60|\le s) = 1-P\left(-\frac{s}{\sqrt{4}} \le \frac{X-60}{\sqrt{4}} \le \frac{s}{\sqrt{4}}\right) \\ &= 1-\left(\Phi\left(\frac{s}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{s}{2}\right)\right) = 2-2\Phi\left(\frac{s}{2}\right) \overset{!}{=} 0.15 \end{aligned}$$

Tabelle für die Standard-Normalverteilung im Buch liefert:

$$\Phi(1.44)\approx 0.925 \implies \frac{s}{2}=1.44 \implies s=2.88$$

Die Fehlertoleranz der Parkuhr darf somit maximal $s=2.88$ Minuten ≈ 2 Minuten und 53 Sekunden betragen, um nicht ausgetauscht zu werden.

b) Existenz von $E(X)$ und $E\left((X-a)^2\right)$: (für stetigen Fall):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} |x|\, f_X(x)dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} |x|\, f_X(x)dx}_{=c<\infty} + \int_{1}^{\infty} |x|\, f_X(x)dx \\ &\le \int_{-\infty}^{-1} x^2 f_X(x)dx + c + \int_{1}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx + c < \infty \quad \text{laut Voraussetzung} \\ &\implies E(X) \text{ existiert} \end{aligned}$$

Sei $a\in\mathbb{R}$, dann existiert $E\left(X^2\right)-2aE(X)+a^2=E\left((X-a)^2\right)$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} E\left((X-a)^2\right) &= E\left((X-E(X)+E(X)-a)^2\right) \\ &= E\left((X-E(X))^2+2(E(X)-a)(X-E(X))+(E(X)-a)^2\right) \\ &= E\left((X-E(X))^2\right)+2(E(X)-a)\underbrace{E\left(X-E(X)\right)}_{0}+(E(X)-a)^2 \\ &= E\left((X-E(X))^2\right)+(E(X)-a)^2 \\ &\ge E\left((X-E(X))^2\right) \end{aligned}$$

mit „=“ genau dann, wenn $a=E(X)$ gilt, d.h. $E(X)$ ist im „quadratischen Mittel“ die beste Approximation von X.

G14

$X_n\sim B(n,p_n), n\in\mathbb{N}$ und $X\sim P(\lambda)$. Sei $k\in\mathbb{N}_0$ mit $k\le n$. Laut Voraussetzung gilt nun

$$\begin{aligned} P(X_n=k) &= \binom{n}{k}\cdot p_n^k\cdot(1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k\cdot(1-p_n)^n \\ &= \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^{k-1}}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{n\cdot p_n}{1-p_n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{n\cdot p_n}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Es gilt $\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^{k-1}}=\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}1$ und $\left(\frac{n\cdot p_n}{1-p_n}\right)^k\xrightarrow{n\to\infty}\lambda^k$, da $p_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ laut Voraussetzung. Weiterhin gilt $\left(1-\frac{n\cdot p_n}{n}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}e^{-\lambda}$, da $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$. Somit gilt

$$P(X_n=k)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{k!}\cdot\lambda^k\cdot e^{-\lambda}=P(X=k)$$

G15

$X \mathrel{\widehat{=}}$ „Zufallsvariable, die angibt, wann zum ersten Mal eine Zahl zwischen 1 und 12 kommt".
$\Longrightarrow$ X ist geometrisch verteilt mit $p = \frac{1}{3}$, d. h. $P(X = k) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k \in \mathbb{N}$

a) Bei der „Verdoppelungsstrategie" beträgt der Einsatz im k-ten Spiel 2^{k-1} Euro und der Gesamteinsatz beträgt

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} = 2^k - 1$$

Gewinnt der Spieler, so erhält er den 3-fachen Einsatz, d. h. $3 \cdot 2^{k-1}$. Sein Gewinn beträgt dann

$$3 \cdot 2^{k-1} - (2^k - 1) = 2^{k-1} + 1$$

$G \mathrel{\widehat{=}}$ „Zufallsvariable, die den Gewinn angibt"

$$P(G = 2^{k-1} + 1) = P(X = k) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

Somit

$$E(G) = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k-1} + 1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \geq \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} = \infty$$

b) Sei $K < \infty$ das Kapital des Spielers mit $K \geq 1$. Das Spiel ist zu Ende, falls eine Zahl zwischen 1 und 12 kommt oder aber das Kapital nicht mehr ausreichend für einen weiteren Einsatz ist. Insgesamt werden also höchstens

$$k_{max} = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : k \leq \log_2 (K + 1)\}$$

Runden gespielt. Für einen Gewinn G gilt demnach:

$$P(G = 2^{k-1} + 1) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \quad \text{für } 1 \leq k \leq k_{max}$$

Im Fall keines Gewinnes, d.h. Verlust des gesamten Einsatzes, gilt:

$$P(G = -(2^{k_{max}} - 1)) = P(X > k_{max}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{max}}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=1}^{k_{max}} (2^{k-1} + 1) \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - (2^{k_{max}} - 1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{max}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{k_{max}-1} \left(\frac{4}{3}\right)^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{k_{max}-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)^{k_{max}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{max}} \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{k_{max}} - 1 + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{max}} - \left(\frac{4}{3}\right)^{k_{max}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k_{max}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

H13

a) Es gilt: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
Hier: $\mu = 5, \sigma^2 = 9$

$$P(X \leq 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{\sqrt{9}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0,749$$

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,953$$

$$P(3 \leq X \leq 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{3-5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - 1 \approx 0,498$$

b) Median von X: $x_{0.5} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 0.5\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : \Phi\left(\frac{x-5}{3}\right) < 0.5\}$. Da $\Phi(0) = 0.5$, muss $\frac{x_{0.5}-5}{3} = 0$ gelten, somit $x_{0.5} = 5$.
0.95-Quantil: Da $\Phi(1.64) = 0.95$ ist, muss $\frac{x_{0.95}-5}{3} = 1.64$ sein. Daraus folgt $x_{0.95} = 9.92$.

c) $Y = \frac{1}{3}X + 2 \overset{\text{Satz 2.35}}{\Longrightarrow} Y \sim N\left(\frac{1}{3} \cdot 5 + 2; \frac{1}{9} \cdot 9\right) = N\left(\frac{11}{3}, 1\right)$
$P(Y \leq 1) = \Phi\left(\frac{1-\frac{11}{3}}{1}\right) = \Phi\left(-\frac{8}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8}{3}\right) = 1 - 0.996 = 0.004$.
Der Median stimmt wie in b) mit dem Erwartungswert berein, d. h. $y_{0.5} = \frac{11}{3}$

H14

a) Wegen $Y = X^2$ gilt für $z \leq 0:$

$$P(Y \leq z) = P(X^2 \leq z) = 0$$

und für $z > 0$ gilt

$$P(Y \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{\sqrt{z}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \overset{Substitution}{=} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\Longrightarrow f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} & f\ddot{u}r\ x \geq 0 \\ 0 & f\ddot{u}r\ x < 0 \end{cases}$$

ist eine Dichte für Y. Dann gilt $E(Y) = E(X^2) = 1$, da $X \sim N(0,1)$ laut Voraussetzung.

b) X gleichverteilt auf $]1;5[$. Betrachte $f:]1;5[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{5-x}$. Dann gilt $f(]1;5[) =]\frac{1}{4};\infty[$ Folglich gilt für $y > \frac{1}{4}:$

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{X}{5-X} \leq y\right) = P\left(X \leq \frac{5y}{y+1}\right) \overset{\text{mit } 1<\frac{5y}{y+1}<5}{=} \int_1^{\frac{5y}{y+1}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5y}{y+1} - 1\right) = \frac{4y-1}{4(y+1)}$$

und für $y \leq \frac{1}{4}$ gilt $P(Y \leq y) = 0$

Man erhält nun die Verteilungsfunktion von Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{4y-1}{4(y+1)} & \text{für } y > \frac{1}{4} \\ 0 & \text{für } y \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Die Dichte erhält man durch Ableiten:

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{5}{4(y+1)^2} & \text{für } y > \frac{1}{4} \\ 0 & \text{für } y \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Der Erwartungswert von Y existiert <u>nicht</u>, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_1^n x \cdot f_Y(x) dx &= \frac{5}{4} \int_1^n \frac{x}{(x+1)^2} dx \geq \frac{5}{4} \int_1^n \frac{x}{4x^2} dx \\ &\text{(da } x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 2 \cdot x \cdot x + x^2 \text{ für } x \geq 1 \text{ gilt)} \\ &= \frac{5}{16} \cdot \log(x)\Big|_1^n = \frac{5}{16} \log(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{aligned}$$

H15

a) Es gilt: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{2} e^x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Fallunterscheidung:
1. $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^t\, dt = \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} e^t \Big|_a^x = \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^a = \frac{1}{2} e^x$$

2. $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^t\, dt + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} e^{-t}\Big|_0^x\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-x} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{2} e^x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} F_{X^2} &= P(X^2 \leq x) = P(|X| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{x}} \\ &= 1 - e^{-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Da X^2 eine nichtnegative Zufallsvariable ist, gilt nach Satz 2.42 für den Erwartungswert:

$$E(X^2) = \int_0^\infty (1 - F_{X^2}(x))\, dx$$

.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty (1 - F_{X^2}(x))\, dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\sqrt{x}}\, dx \quad \left(\text{Substitution: } t = \sqrt{x}, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^{\sqrt{b}} 2t \cdot e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left(-2t \cdot e^{-t}\Big|_0^{\sqrt{b}} - \int_0^{\sqrt{b}} -2\, e^{-t}\, dt \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} -2\sqrt{b}\, e^{-\sqrt{b}} - 2\, e^{-\sqrt{b}} + 2 = 2
\end{aligned}$$

c) X ist symmetrisch zur Null verteilt und $E(X)$ existiert (da $E(X^2) < \infty$ und somit nach G10 b) auch $E(X) < \infty$). Dann liefert Satz 2.41:

$$E(X) = 0$$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2$

d) Tschebyscheffsche Ungleichung: $P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$

$$\begin{aligned}
P(|X| < 2) &= 1 - P(|X| \geq 2) = 1 - P(|X - 0| \geq 2) \\
&\geq 1 - \frac{2}{2^2} = 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$