15.05.2006

Lösungsvorschlag zur 4. Übung

G10

a) $L \mathrel{\widehat{=}}$ „Lebensdauer", $L \sim Ex(5 \cdot 10^{-4})$

$$P(L > 500) = 1 - P(L \leq 500) = 1 - F(500) = 1 - (1 - e^{-5 \cdot 10^{-4} \cdot 500}) = e^{-0.25} = 0.7788$$

b) $X \mathrel{\widehat{=}}$ „Anzahl der Glühbirnen mit $L > 500$ " $\implies X \sim B(10, p)$ mit $p = 0.7788$

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0.7788^8 \cdot 0.2212^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.7788^9 \cdot 0.2212^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.7788^{10} \cdot 0.2212^0 \\ &= 0.29798 + 0.23314 + 0.08208 \\ &= 0.6132 \end{aligned}$$

c) $X \sim B(n,p) \implies E(X) = n \cdot p$
Hier:

$$X \sim B(10; 0.7788) \implies E(X) = 10 \cdot 0.7788 = 7.788$$

G11

Bezeichne N die Anzahl der gelegten Eier und S die Anzahl der sich entwickelnden Eier. Nach Voraussetzung gilt dann:

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$P(\{S = k\} | \{N = n\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} P(S = i) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{S = i\} | \{N = n\}) \cdot P(N = n) = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda \cdot p)^i \cdot e^{-\lambda \cdot p}}{i!} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-i}}{(n-i)!} \cdot e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda \cdot p)^i \cdot e^{-\lambda \cdot p}}{i!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \cdot e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda \cdot p)^i \cdot e^{-\lambda \cdot p}}{i!} \end{aligned}$$

G12

$(a) \implies (b)$:
Es gilt laut Vorraussetzung $P(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $0 < p < 1$. Dann gilt für $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$P(X > n + k) = \sum_{i > n+k} p \cdot (1-p)^{i-1} = (1-p)^n \cdot \sum_{i > k} p \cdot (1-p)^{i-1} = (1-p)^n \cdot P(X > k)$$

und somit insbesondere für $k = 0$

$$P(X > n) = (1-p)^n \cdot \underbrace{P(X > 0)}_{=1} = (1-p)^n$$

Dann folgt für $n, k, \in \mathbb{N}$:

$$P(\{X > n + k\} | \{X > n\}) = \frac{P(X > n + k)}{P(X > n)} = P(X > k)$$

$(b) \implies (a)$:
Es gilt laut Vorraussetzung für $k \in \mathbb{N}$ (d.h. $k \geq 1$)

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(X > k, X > 1) = P(\{X > k\} | \{X > 1\}) \cdot P(X > 1) \\ &= P(X > k - 1) \cdot P(X > 1) \end{aligned}$$

Vollständige Induktion über k liefert:

$$P(X > k) = (P(X > 1))^k$$

Mit $p := P(X = 1) \in]0,1[$ folgt:

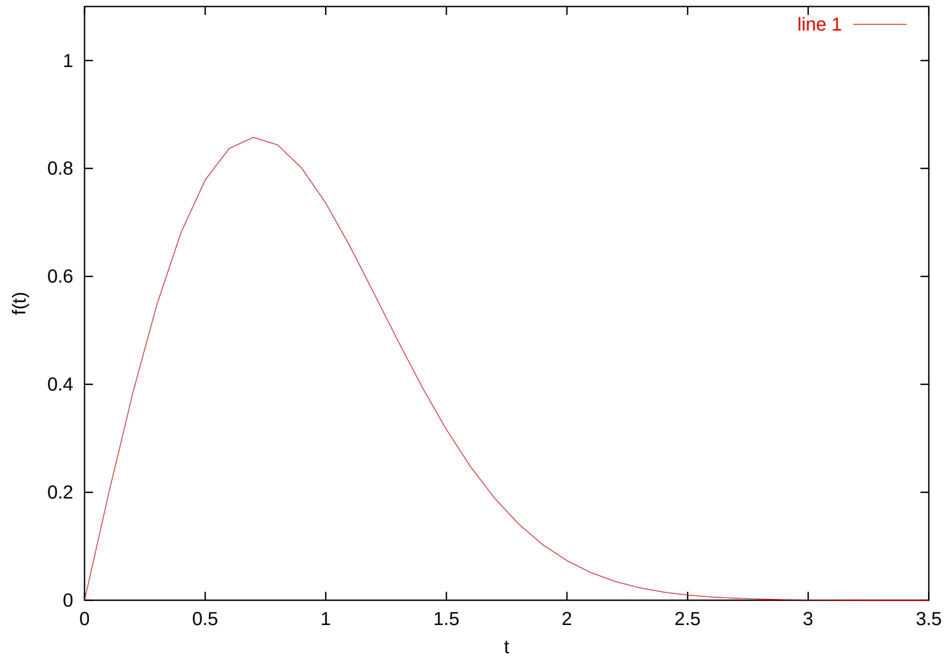
$$\begin{aligned} P(X = i) &= P(X > i-1) - P(X > i) \\ &= (P(X > 1))^{i-1} - (P(X > 1))^{i} \\ &= (P(X > 1))^{i-1} \cdot (1 - P(X > 1)) \\ &= (1-p)^{i-1} \cdot p \end{aligned}$$

H10

a) Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt &= \int_{0}^{\infty} c \cdot t \cdot e^{-\alpha t^2}\,dt \overset{(*)}{=} -\frac{c}{2\alpha}\int_{0}^{-\infty} e^{z}\,dz = \frac{c}{2\alpha}\int_{-\infty}^{0} e^{z}\,dz \\ &= \frac{c}{2\alpha} \overset{!}{=} 1 \\ \Longrightarrow\ c = 2\alpha \end{aligned}$$

$(*)$ $z = -\alpha t^2 \implies dz = -2\alpha t\,dt$ **Dichtefunktion:**



b)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 2\alpha t \cdot e^{-\alpha t^2}\,dt \overset{(**)}{=} \int_{0}^{\alpha x^2} e^{-z}\,dz = 1 - e^{-\alpha x^2} \text{ für } x \geq 0$$

$(**)$ $z = \alpha t^2 \implies dz = 2\alpha t\,dt$

$$\Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x^2} & \text{falls} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

c)

$$P(x \leq X < \infty) = 1 - F(x) = e^{-\alpha x^2}$$

$$P(b \leq X < \infty) = 1 - F(b) = e^{-\alpha b^2}$$

$$\begin{aligned} P(b + x \leq X < \infty | b \leq X < \infty) &= \frac{P(b + x \leq X < \infty \wedge b \leq X < \infty)}{P(b \leq X < \infty)} = \frac{P(b + x \leq X < \infty)}{P(b \leq X < \infty)} \\ &= \frac{e^{-\alpha(b+x)^2}}{e^{-\alpha b^2}} = e^{-\alpha x^2 - 2\alpha b x} \end{aligned}$$

Es gilt nun: $e^{-\alpha x^2 - 2\alpha b x} \leq e^{-\alpha x^2}$

Interpretation:
Die Wahrscheinlichkeit für z.B. eine zusätzliche Lebensdauer x einer Glühbirne, wenn sie bereits b Zeiteinheiten funktioniert hat, ist kleiner als für eine „neue“ Glühbirne x Zeiteinheiten zu funtionieren.

H11

1) Offenbar ist

$$P(|U| \le x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Für $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} P(|U| \le x) =& P(-x \le \cos(X) \le x) = P(\arccos(x) \le X \le \arccos(-x)) = \frac{1}{\pi}(\arccos(-x) - \arccos(x)) \\ =& \frac{1}{\pi}(\pi - 2\arccos(x)) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(x) \end{aligned}$$

Man erhält somit die Verteilungsfunktion F von $|U|$ zu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(x) & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

2)

$$P(|U| \le |V|) = P(\cos^2(X) \le 1 - \cos^2(X)) = P(|U| \le \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$$

3)

$$E(U) = \int_0^\pi \cos(x)\frac{1}{\pi}\,dx = 0$$

Zudem gilt

$$E(U^2) = \int_0^\pi \cos^2(x)\frac{1}{\pi}\,dx = \int_0^\pi \sin^2(x)\frac{1}{\pi}\,dx = E(V^2)$$

sowie

$$E(U^2) + E(V^2) = E(\cos^2(X) + \sin^2(X)) = 1$$

d.h. $E(U^2) = \frac{1}{2}$.

H12

a) $E(\frac{1}{X}) \ne \frac{1}{E(X)}$ i.a., da z.B. für X mit

$$P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{E(X)} = \frac{2}{3} \ne E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{3}{4}$$

Betrachte X mit:

$$P(X=-1) = \frac{1}{9},\ P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9},\ P(X=2) = \frac{4}{9}$$

$$\implies E(X) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{8}{9} = 1 = -\frac{1}{9} + \frac{8}{9} + \frac{2}{9} = E\left(\frac{1}{X}\right)$$

b) Es gilt für eine konvexe Funktion: $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$ für $\lambda \in [0,1]$. Wir bezeichnen mit $p_i = P(X = x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.
Induktionsbeweis:
Induktionsanfang ($k = 1$ klar!) mit $k = 2$ und $p_1 + p_2 = 1$:

$$h(E(X)) = h(p_1 \cdot x_1 + (1-p_1)\cdot x_2) \le p_1 \cdot h(x_1) + (1-p_1)\cdot h(x_2) = E(h(X))$$

Induktionsschritt von k nach $k+1$:

$$\begin{aligned} h(E(X)) = h\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i \cdot P(X = x_i)\right) &= h\left(p_{k+1}\cdot x_{k+1} + (1-p_{k+1})\frac{1}{1-p_{k+1}}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i\right) \\ &\le p_{k+1}\cdot h(x_{k+1}) + (1-p_{k+1})\cdot h\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{p_i}{1-p_{k+1}}\right) \\ \text{(lt. Induktionsannahme)} \qquad &\le p_{k+1}\cdot h(x_{k+1}) + (1-p_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k} h(x_i)\cdot \frac{p_i}{1-p_{k+1}}\right) = E(h(X)) \end{aligned}$$

da $\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{1-p_{k+1}} = 1$ für den Fall, dass X nur Werte in $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ annimmt.