08.05.2006

Lösungsvorschlag zur 3. Übung

G7

Ergebnismenge: $\Omega = \{(a,b,c,d) : a,b,c,d \in \{w,z\}\} \Rightarrow |\Omega| = 2^4 = 16$

$$\begin{aligned}
A &= \{(w,w,w,w),(w,w,w,z),(w,w,z,w),(w,w,z,z),(z,z,w,w)(z,z,w,z),(z,z,z,w),(z,z,z,z)\}\\
B &= \{(w,w,w,w),(w,w,z,w),(w,z,w,w),(w,z,z,w),(z,w,w,z),(z,w,z,z),(z,z,w,z),(z,z,z,z)\}\\
C &= \{(w,w,w,w),(z,w,w,w),(w,z,z,z),(z,z,z,z)\}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

- $A \cap B = \{(w,w,w,w),(w,w,z,w),(z,z,w,z),(z,z,z,z)\}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow A \text{ und } B \text{ sind unabhängig.}$$

- $A \cap C = \{(w,w,w,w),(z,z,z,z)\}$

$$\Rightarrow P(A \cap C) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

$$\Rightarrow A \text{ und } C \text{ sind unabhängig.}$$

- $B \cap C = \{(w,w,w,w),(z,z,z,z)\}$

$$\Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$$

$$\Rightarrow B \text{ und } C \text{ sind unabhängig.}$$

Aber: $A \cap B \cap C = \{(w,w,w,w),(z,z,z,z)\}$

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$\Rightarrow A, B \text{ und } C \text{ sind } \underline{\text{nicht}} \text{ vollständig unabhängig.}$$

G 8

Der Trugschluss des Gefangenen liegt darin, dass er davon ausgeht, dass der Wärter immer "1" sagt, wenn 3 nicht hingerichtet wird. Formal betrachtet man die Ereignisse

H_i : „Gefangener i wird hingerichtet, $i = 1,2,3$"
A_i : „Wärter sagt i, $i = 1,2$"

Dann gilt $P(H_i) = \frac{2}{3}$ für $i = 1,2,3$ sowie $P(A_1|H_1 \cap H_3) = 1$, $P(A_1|H_2 \cap H_3) = 0$, d.h. Wärter lügt nicht, und $P(A_1|H_1 \cap H_2) = p$ mit $p \in [0,1]$. Der Gefangene 3 geht von $p = 1$ aus. Man berechnet nun:

$$P(A_1) = P(A_1|H_1 \cap H_2) \cdot P(H_1 \cap H_2) + P(A_1|H_1 \cap H_3) \cdot P(H_1 \cap H_3) + P(A_1|H_2 \cap H_3) \cdot P(H_2 \cap H_3) = \frac{p+1}{3}$$

Somit ergibt sich:

$$P(H_3|A_1) = 1 - P(H_1 \cap H_2|A_1) = 1 - \frac{P(A_1|H_1 \cap H_2) \cdot \frac{1}{3}}{P(A_1)} = 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

Hierbei führt $p = 1$ zur Wahrscheinlichkeit $1/2$ und $p = 1/2$ zur Wahrscheinlichkeit $2/3$.

G9

Berechnung der Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X und Y:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_1^x \tfrac{1}{3}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1) & \text{für } 1 \le x \le 4 \\ 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = \int_0^x 2 \cdot e^{-2t}\, dt = -e^{-2t}\Big|_0^x = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0 \end{cases}$$

<u>Für $2X$</u>:

$$F_{2X}(x) = P(2X \le x) = P(X \le \tfrac{1}{2}x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} & \text{für } 2 \le x \le 8 \\ 1 & \text{für } x > 8 \end{cases}$$

Dichte:

$$f_{2X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } 2 \le x \le 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Für Y^2</u>:

$$F_{Y^2}(x) = P(Y^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le Y \le \sqrt{x}) = \begin{cases} 1 - e^{-2\sqrt{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte:

$$f_{Y^2}(x) = \begin{cases} 2e^{-2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Für $3Y - 4$</u>:

$$F_{3Y-4}(x) = P(3Y - 4 \le x) = P\left(Y \le \frac{x+4}{3}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-2\left(\frac{x+4}{3}\right)} & \text{für } \frac{x+4}{3} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{\left(-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}\right)} & \text{für } x > -4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dichte:

$$f_{3Y-4}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{\left(-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}\right)} & \text{für } x > -4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

H7

a) Verteilung von X:

(i)

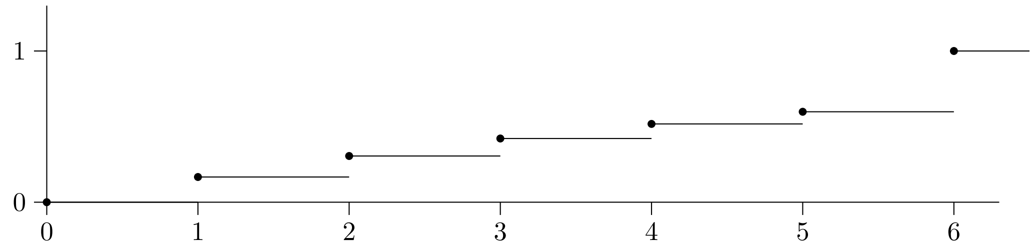
i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6^2}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^2}{6^3}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^3}{6^4}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^4}{6^5}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5$

<u>Erklärung:</u>
$P(X = 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$, da beim letzten Wurf jede beliebige Zahl gewürfelt werden darf, ohne dass sich an der Anzahl der Würfe nochmal etwas ändert. Es ist nur relevant, dass die ersten 5 Würfe keine 6 waren (um zum 6.Wurf zu gelangen).

(ii)

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 0.1\overline{6} & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 0.30\overline{5} & \text{für } 2 \le x < 3 \\ 0.4213 & \text{für } 3 \le x < 4 \\ 0.5177 & \text{für } 4 \le x < 5 \\ 0.5981 & \text{für } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{für } x \ge 6 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion



(iii)

$$P(2 \le X \le 4) = \sum_{i=2}^{4} P(X=i) = \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3} + \frac{5^3}{6^4} = \frac{455}{1296} = 0.3511$$

b) $A \mathrel{\widehat{=}}$ „alle 3 Würfel zeigen die gleiche Augenzahl“

$$p := P(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

X ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{36}$, d.h.

$$P(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1} \quad , k = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned} P(33 \le X \le 36) &= P(X=33) + P(X=34) + P(X=35) + P(X=36) \\ &= \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^{32} \cdot \left[1 + \frac{35}{36} + \left(\frac{35}{36}\right)^2 + \left(\frac{35}{36}\right)^3\right] \\ &= 0.04326 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - \sum_{k=1}^{10} P(X=k) &= 1 - \sum_{k=1}^{10} p(1-p)^{k-1} = 1 - p \cdot \sum_{k=0}^{9} (1-p)^k \\ &= 1 - p \cdot \frac{1-(1-p)^{10}}{1-(1-p)} = (1-p)^{10} = \left(\frac{35}{36}\right)^{10} \\ &= 0.75449 \end{aligned}$$

Kürzer:
$X > 10 \mathrel{\widehat{=}}$ „kein Erfolg in den ersten 10 Würfen“. Somit

$$P(X > 10) = (1-p)^{10} = \left(\frac{35}{36}\right)^{10}$$

H8

Seien A und B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Ereignisse

$$A \mathrel{\widehat{=}} \text{„zufällig ausgewählte Familie hat genau einen Jungen“}$$
$$B_k \mathrel{\widehat{=}} \text{„zufällig ausgewählte Familie hat genau k Kinder“}, \; k = 0, 1, \ldots$$

Aus dem Aufgabentext folgt nun:

$$P(B_k) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k, k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$P(A|B_k) = \binom{k}{1} \cdot \left(\frac{12}{23}\right) \cdot \left(\frac{11}{23}\right)^{k-1} \quad \text{für } k \ge 1$$
$$P(A|B_0) = 0$$

a) Mit der Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(A|B_k) \cdot P(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{12}{23}\right) \cdot \left(\frac{11}{23}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \frac{12}{23} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{11}{23} \cdot \frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{36}{368} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{33}{92}\right)^{k-1} \\ \text{(mit Hinweis)} \quad &= \frac{36}{368} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{33}{92})^2} = 0.23786 \end{aligned}$$

b) Mit der Formel von Bayes gilt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{2 \cdot \frac{12}{23} \cdot \frac{11}{23} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2}{0.23786} = 0.29505$$

H9

Bezeichne B : "Die Summe der geworfenen Augenzahlen beträgt 4".

a)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^{4} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{1296} \cdot \frac{1}{16} \approx 0.105951$$

Also gilt

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{48}}{0.105951} \approx 0.196632$$

b) Sei G : "Die Anzahl der geworfenen Würfel ist gerade". Dann ist $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$ und

$$P(G) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{2i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$$

und

$$P(B|G) = \frac{P(B \cap A_2) + P(B \cap A_4)}{P(G)} = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_4) \cdot P(A_4)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1296} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{3}} \approx 0.062644675$$

c) Sei E : "Erster Wurf zeigt 1"

$$P(B \cap E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap E|A_i) \cdot P(A_i) = \sum_{i=2}^{4} P(B \cap E|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{216} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{1296} \cdot \frac{1}{16} \approx 0.008150$$

$$P(A_2|B \cap E) = \frac{P(B \cap E|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B \cap E)} = \frac{\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{4}}{0.00815} \approx 0.852079$$

d) Sei M_r : "Maximale Augenzahl $\leq r$ für $r = 1, \ldots, 6$"
und D_r : "Maximale Augenzahl $= r$ für $r = 1, \ldots, 6$"
Dann gilt:

$$P(M_r) = \sum_{i=1}^{\infty} P(M_r|A_i) \cdot P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{r}{6}\right)^i \cdot \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{r}{12}\right)^i = \frac{\frac{r}{12}}{1 - \frac{r}{12}} = \frac{r}{12 - r}$$

und

$$P(D_r) = P(M_r \setminus M_{r-1}) = P(M_r) - P(M_{r-1}) = \frac{12}{(12 - r)(13 - r)}$$

für $r = 2, \ldots, 6$, sowie $P(D_1) = P(M_1) = \frac{1}{11}$.