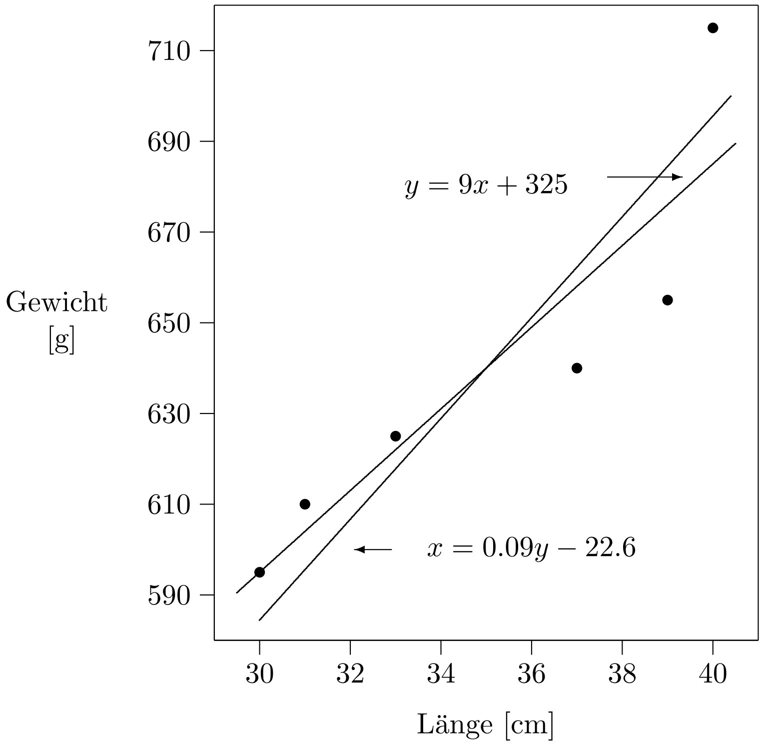
Lösungsvorschlag zur 2. Übung

G4

a) Punktediagramm inklusive der beiden Geraden aus c) und d):



b) Es ist $\overline{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{210}{6} = 35$ und $\overline{y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = \frac{3840}{6} = 640$. Außerdem erhalten wir:

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \overline{x}\cdot\overline{y}\right) = \frac{1}{5}\cdot 135210 - \frac{6}{5}\cdot 35\cdot 640 = 162, \\ s_x^2 &= \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \overline{x}^2\right) = \frac{1}{5}\cdot 7440 - \frac{6}{5}\cdot 35^2 = 18, \\ s_y^2 &= \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} y_i^2 - \overline{y}^2\right) = \frac{1}{5}\cdot 2466600 - \frac{6}{5}\cdot 640^2 = 1800, \end{aligned}$$

und somit ergibt sich für die empirische Korrelation:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y} = \frac{162}{\sqrt{18\cdot 1800}} = 0.9\ .$$

Diese empirische Korrelation spricht für einen positiven linearen Zusammenhang der betrachteten Größen.

c) Gesucht ist eine Regressionsgerade $y = a\cdot x + b$. Mit den errechneten Werten aus b) erhält man:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{162}{18} = 9 \qquad \text{und} \qquad b = \overline{y} - a\overline{x} = 640 - 9\cdot 35 = 325.$$

Als Vorhersage für das Gewicht in Abhängigkeit der Länge ergibt sich also $y = 9x + 325$.

d) Gesucht ist eine Regressionsgerade $x = \mathbf{a}\cdot y + \mathbf{b}$ (zur Unterscheidung zwischen den Teilaufgaben sind hier die Koeffizienten fett gedruckt). Wir vertauschen die Variablen x und y und erhalten:

$$\mathbf{a} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} = \frac{162}{1800} = 0.09 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} = \overline{x} - \mathbf{a}\overline{y} = 35 - 0.09\cdot 640 = -22.6\ .$$

Als Vorhersage für die Länge in Abhängigkeit des Gewichts ergibt sich also $x = 0.09y - 22.6$. Zum Einzeichnen dieser Geraden in das Punktediagramm ermittelt man entweder zwei Punkte auf der Geraden oder die nach y aufgelöste Geradengleichung

$$y = \frac{100}{9}x + \frac{2260}{9}\ .$$

e) Einsetzen der ersten Geradengleichung aus d) in diejenige aus c) liefert:

$$\begin{aligned} y &= 9 \cdot (0.09y - 22.6) + 325 \\ y(1 - 9 \cdot 0.09) &= -9 \cdot 22.6 + 325 \\ y &= \frac{121.6}{0.19} = 640 \end{aligned}$$

Für x erhält man durch Einsetzen $x = 0.09 \cdot 640 - 22.6 = 35$. Der Schnittpunkt ist also gerade $(\overline{x}, \overline{y})$.

G5

Die Ergebnismenge $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ beschreibe die Anzahl der intakten Glühbirnen. Als σ-Algebra wählen wir die Potenzmenge $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Dann lassen sich die Ereignisse A_1 und A_2 wie folgt darstellen:

$$A_1 = \{2\} \text{ und } A_2 = \{0, 1, 2\}$$

und es gilt $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Es soll nun gelten: $P(A_1) = \frac{3}{7}$ und $P(A_2) = \frac{5}{7}$. Dann kann man für die folgenden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit berechnen:

- $A_1^C = \{0, 1, 3\}$, $P(A_1^C) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$
- $A_2^C = \{3\}$, $P(A_2^C) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$
- $A_1 \cup A_2^C = \{2, 3\}$, $P(A_1 \cup A_2^C) = P(A_1) + P(A_2^C) = \frac{5}{7}$
- $A_1^C \cap A_2 = \{0, 1\} = (A_1 \cup A_2^C)^C$ (Regel von De Morgan) $\Rightarrow P(A_1^C \cap A_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2^C) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$
- $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

G6

Betrachte die Ereignisse U_n sowie S mit:

$U_n \;\widehat{=}\;$ „n-te Urne wird gewählt“
$S \;\widehat{=}\;$ „schwarze Kugel wird gezogen“

Nach Aufgabenstellung gilt

$$P(U_n) = \frac{1}{N+1} \quad \text{und} \quad P(S|U_n) = \frac{n}{N} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, ..., N \text{ und } N \geq 1.$$

Dann folgt:

a)

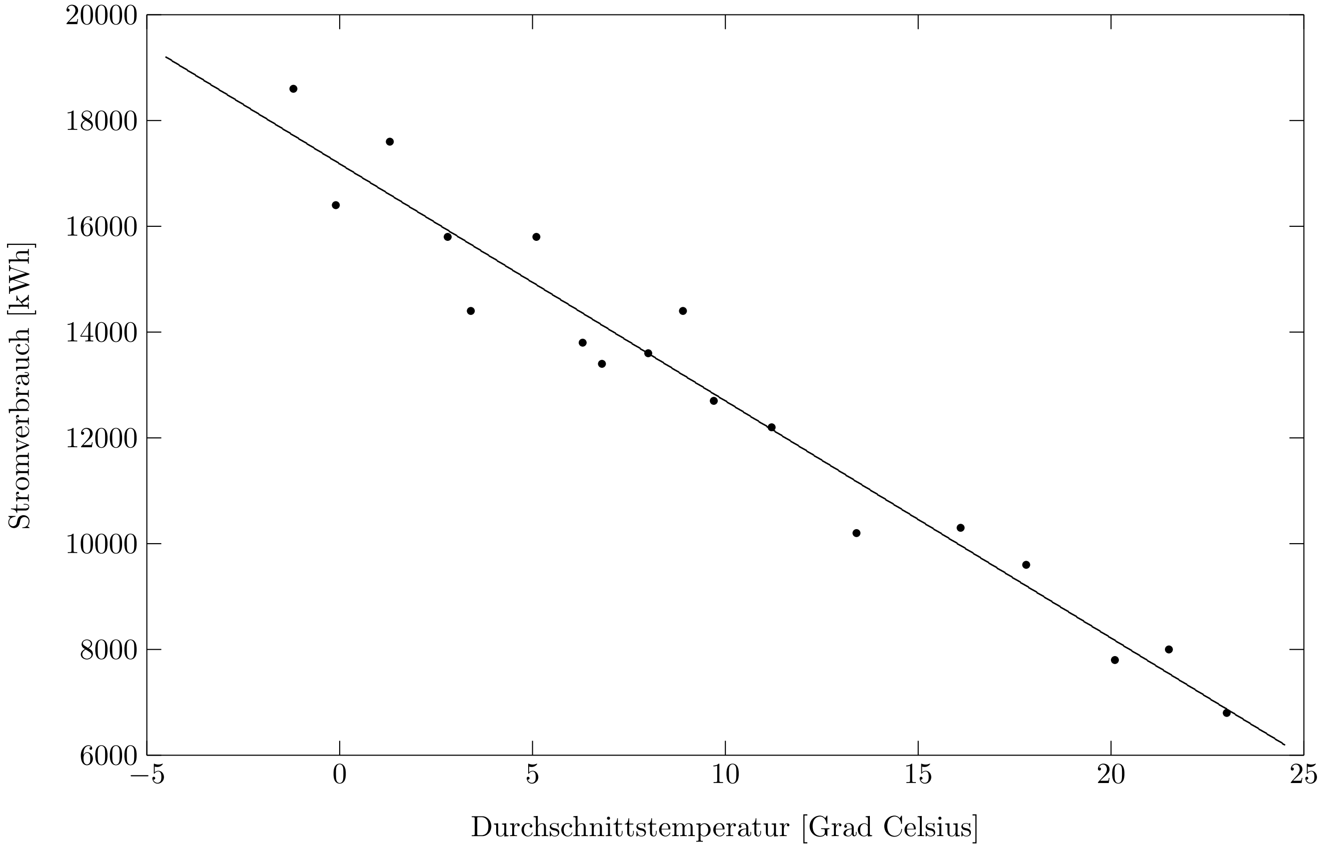
$$P(S) = \sum_{n=0}^{N} P(S|U_n) \cdot P(U_n) = \frac{1}{N(N+1)} \sum_{n=0}^{N} n = \frac{1}{2} \quad \text{für } N \geq 1 \text{ und } P(S) = 0 \text{ für } N = 0.$$

b)

$$P(U_n|S) = \frac{P(S|U_n) \cdot P(U_n)}{P(S)} = 2 \cdot \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{N+1} = \frac{2n}{N(N+1)} \quad \text{für } N \geq 1.$$

H4

a)



b) Empirische Kovarianz: $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$\bar{x} = 9.67 \qquad \bar{y} = 12855.56$$
$$s_{xy} = -25413.66 \qquad s_x = 7.53$$
$$s_y = 3450,19$$

Empirischer Korrelationskoeffizient : $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -0.98$

c) Regressionsgerade: $y = \hat{a}x + \hat{b}$

$\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = -448.21$ und $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} = 17189,75 \implies y = -448.21x + 17189.75$

d) Stromabsatz bei 15°C: $-448.21 \cdot 15 + 17189.75 = 10466.6$
Somit beträgt der Stromabsatz bei 15°C schätzungsweise 10466.6 KWh.

H5

a) Es geht darum, aus einer Menge von 8 Personen eine Menge von 5 Personen herauszuholen. Dabei spielt die Anordnung keine Rolle und Wiederholungen sind nicht erlaubt. Es gibt daher $\binom{8}{5} = 56$ Möglichkeiten.

b) Wir überlegen zunächst, wie die Buchblöcke Physik (P), Biologie (B) und Chemie (C) angeordnet werden können. Dafür gibt es 3! Möglichkeiten, da keine Wiederholungen vorkommen dürfen und die Anordnung beachtet werden muss. Für die Kombinationen innerhalb der Blöcke gibt es aus den selben Gründen 4! (bei P), 3! (bei B) und 8! (bei C) Möglichkeiten, so dass man die Bücher insgesamt auf $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 8! = 34\,836\,480$ Möglichkeiten (!) in den Schrank stellen kann.

c) Bei dieser Fragestellung spielt die Anordnung keine Rolle, außerdem sind Wiederholungen erlaubt (es geht nicht um einzelne Individuen, sondern um die Fachrichtung, die durch das Individuum vertreten wird). Die Anzahl der Möglichkeiten, dieses Gremium zu besetzen, ist deshalb $\binom{3+5-1}{5} = 21$.

d) Bei jeder der 10 Aufgaben gibt es drei Antwortmöglichkeiten. Wir können das Problem so auffassen, dass 10 Mal entweder Antwort a oder b oder c gewählt wird. Wir ziehen also 10 Mal aus einer Menge mit drei Elementen, wobei Wiederholungen erlaubt sind und die Anordnung eine Rolle spielt (die Fragen lassen sich voneinander unterscheiden). Deshalb gibt es $3^{10} = 59\,049$ Möglichkeiten, den Klausurzettel auszufüllen.

H6

Es handelt sich um ungeordnete Proben ohne Wiederholung, d.h. man benötigt Binomialkoeffizienten.

a) $P(D_2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{28}{0}}{\binom{32}{2}} = \frac{6\cdot 1}{496} = 0.012$

b) $P(C_1) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} = \frac{4\cdot 6906900}{64512240} = 0.42825$

c) Sei $C \mathrel{\widehat{=}}$ „Tobias hat mindestens 2 Buben“. Dann gilt:

$$P(C) = P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) = 1 - P(C_0) - P(C_1)$$

mit $P(C_1)$ wie in b) und mit $P(C_0) = \frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}} = 0.20342$
Somit ist $P(C) = 1 - 0.20342 - 0.42825 = 0.36833$

d) Wenn Tobias genau einen Buben hat, dann sind noch 22 Karten für Andreas möglich, davon 3 Buben.

$$P(A_1|C_1) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{19}{9}}{\binom{22}{10}} = \frac{3\cdot 92378}{646646} = 0.42857$$

e) Sei $D \mathrel{\widehat{=}}$ „jeder Spieler hat genau einen Buben“. Wir verwenden die Multiplikationsformel:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C_1 \cap A_1 \cap B_1) = P(C_1)\cdot P(A_1|C_1)\cdot P(B_1|C_1 \cap A_1) \\ &\overset{b),d)}{=} 0.42825 \cdot 0.42857 \cdot \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{10}{9}}{\binom{12}{10}} = 0.05562 \end{aligned}$$