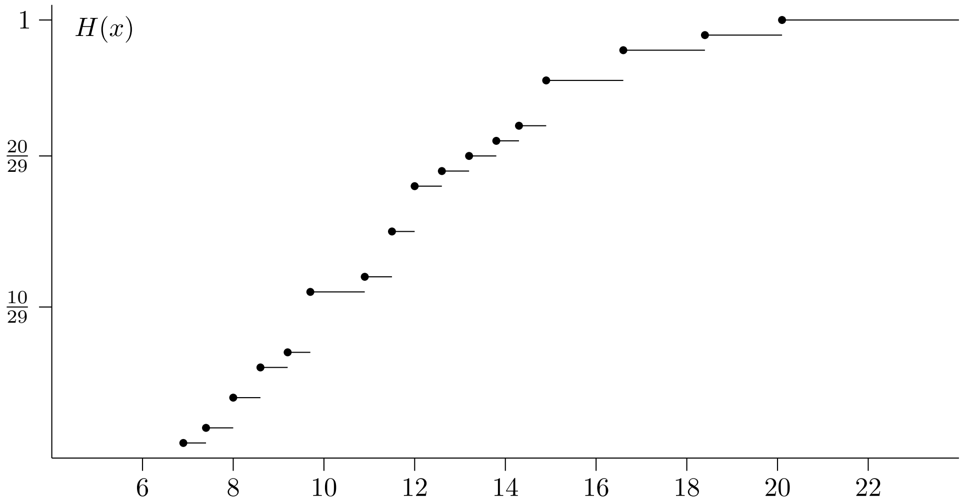
Lösungsvorschlag zur 1. Übung

G1

a) **Geordnete Meßreihe:**

6.9	7.4	8.0	8.0	8.6	8.6	9.2	9.7	9.7	9.7
9.7	10.9	11.5	11.5	11.5	12.0	12.0	12.0	12.6	13.2
13.8	14.3	14.9	14.9	14.9	16.6	16.6	18.4	20.1	

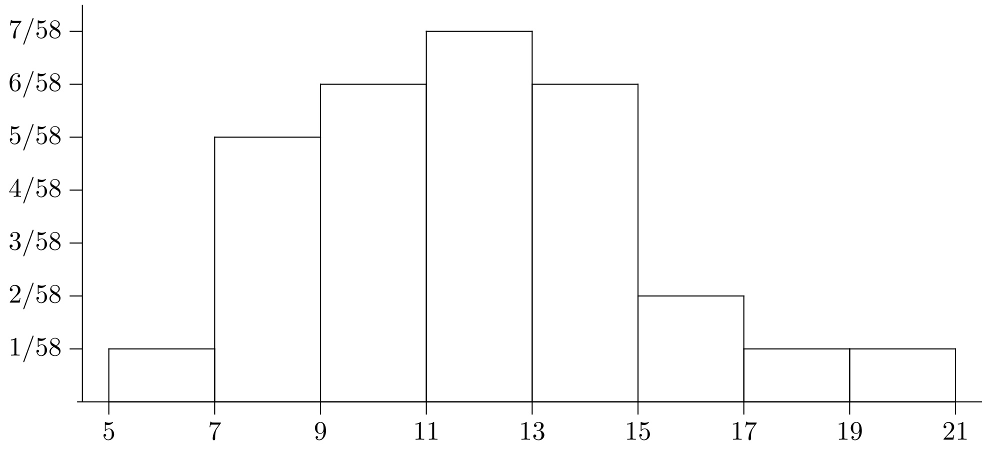
Empirische Verteilungsfunktion:



Häufigkeitstabelle:

Klasse	Häufigkeit	Relative Häufigkeit	$\frac{\text{RelativeHäufigkeit}}{\text{Klassenbreite}}$
]5,7]	1	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{58}$
]7,9]	5	$\frac{5}{29}$	$\frac{5}{58}$
]9,11]	6	$\frac{6}{29}$	$\frac{6}{58}$
]11,13]	7	$\frac{7}{29}$	$\frac{7}{58}$
]13,15]	6	$\frac{6}{29}$	$\frac{6}{58}$
]15,17]	2	$\frac{2}{29}$	$\frac{2}{58}$
]17,19]	1	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{58}$
]19,21]	1	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{58}$

Histogram:



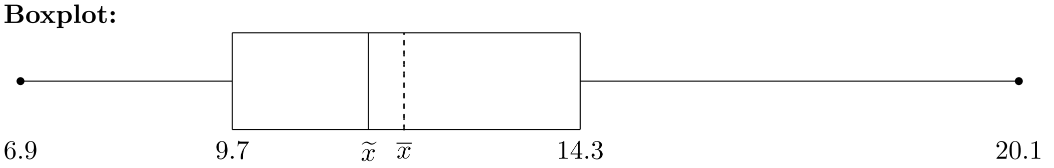
b)

$$\overline{x} = \frac{1}{29}\sum_{i=1}^{29} x_i \approx 11.972 \quad \text{arithmetisches Mittel} \qquad s_x^2 = \frac{1}{28}\sum_{i=1}^{29}(x_i - 11.972)^2 \approx 11.346 \quad \text{empirische Varianz}$$

$$\tilde{x} = x_{(15)} = 11.5 \quad \text{Median} \qquad s_x = \sqrt{s_x^2} \approx 3.368 \quad \text{empirische Standardabweichung}$$

$$x_{(29)} - x_{(1)} = 13.2 \quad \text{Spannweite} \qquad x_{0.75} - x_{0.25} = x_{(22)} - x_{(8)} = 4.6 \quad \text{Quartilabstand}$$

c) **Boxplot:**



G2

a) Da f monoton wachsend ist, bleibt die Reihenfolge in der geordneten Meßreihe erhalten, d.h. es gilt

$$y_{(i)} = f(x_{(i)}), \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{und somit gilt} \qquad \widetilde{y} = y_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)} = f(x_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}) = f(\widetilde{x})$$

b) Wenn f monoton fallend ist, so gilt

$$f(x_{(1)}) \geq f(x_{(2)}) \geq \ldots \geq f(x_{(n)})$$

d.h.

$$y_{(i)} = f(x_{(n+1-i)}), \quad i = 1, \ldots, n$$

Dann gilt für n gerade: $\widetilde{y} = y_{(\frac{n}{2})} = f(x_{(\frac{n}{2}+1)})$ Für n ungerade: $\widetilde{y} = y_{(\frac{n+1}{2})} = f(x_{(\frac{n+1}{2})}) = f(\widetilde{x})$

G3

a) Die zusammengesetzte Meßreihe $x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_m}^{(m)}$ besteht aus $n = \sum_{i=1}^m n_i$ Meßwerten. Dann gilt

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j} x_i^{(j)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j \; \overline{x}^{(j)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{n_j}{n} \; \overline{x}^{(j)}$$

b) Die empirische Varianz s_x^2 läßt sich im allgemeinen nicht als konvexe Linearkombination schreiben, da z.B. für $m = 2, n_1 = n_2 = 1, x_1^{(1)} = -1, x_1^{(2)} = 1$ gilt $s^2_{x^{(1)}} = s^2_{x^{(2)}} = 0$ aber $s_x^2 = 2$.

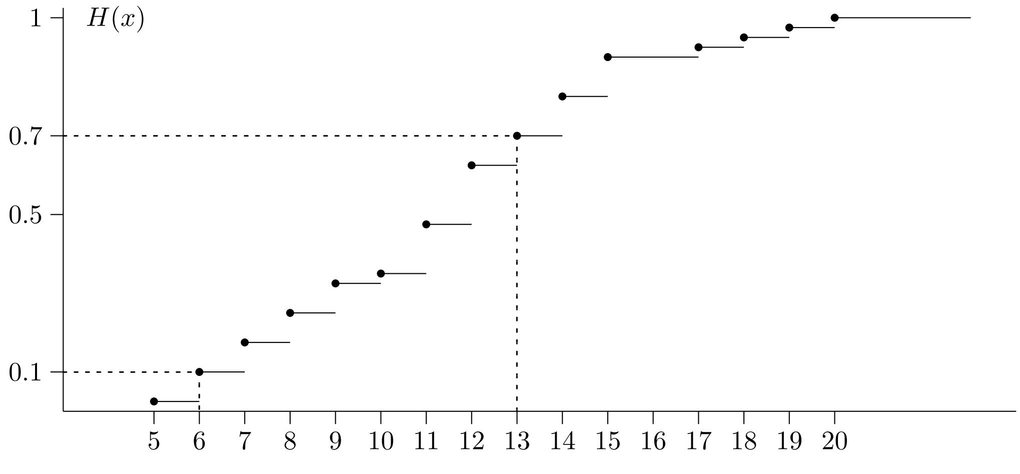
H1

Geordnete Meßreihe:

5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10
11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	12	13	13	13
14	14	14	14	15	15	15	15	17	18	19	20		

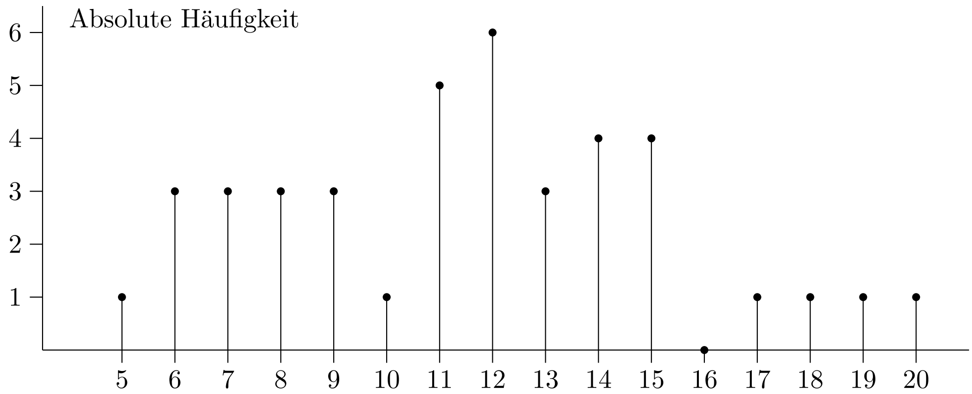
a) $\widetilde{x} = x_{(20)} = 12$ Median

b) **Empirische Verteilungsfunktion:**

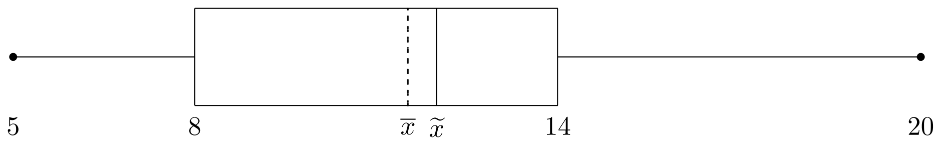


Aus der Zeichnung erhält man $x_{0.1} = 6$ und $x_{0.7} = 13$

c) **Stabdiagramm:**



d) **Boxplot:** $x_{0.25} = 8$ $x_{0.75} = 14$ $\overline{x} = 11.525$



H2

1.) $y_i = a \cdot x_i + b, \quad i = 1, \ldots, n$
$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a \cdot x_i + b) = a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n} \cdot n \cdot b = a \cdot \overline{x} + b$

2.) $s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - a\overline{x} - b)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a(x_i - \overline{x}))^2$
$= a^2 \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = a^2 \cdot s_x^2$

3.) Durchschnittliche Temperatur in °F: $\overline{x} = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i = 80°\mathrm{F}$

Mit Aufgabenteil 1.) gilt für $\overline{y}$ in °C: $\overline{y} = \frac{5}{9}\overline{x} - \frac{5}{9} \cdot 32 = 26.\overline{6}°\mathrm{C}$

Standardabweichung in °C mit Aufgabenteil 2.): $s_y^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot s_x^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{13} \cdot 52 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot 4 \implies s_y = \frac{10}{9}$

H3

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
(n-1)s_x^2 &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_i^{(j)} - \overline{x}\right)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\left(x_i^{(j)} - \overline{x}^{(j)}\right) + \left(\overline{x}^{(j)} - \overline{x}\right)\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\left(x_i^{(j)} - \overline{x}^{(j)}\right)^2 + 2\underbrace{\left(x_i^{(j)} - \overline{x}^{(j)}\right)\left(\overline{x}^{(j)} - \overline{x}\right)}_{=0} + \left(\overline{x}^{(j)} - \overline{x}\right)^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_i^{(j)} - \overline{x}^{(j)}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j\left(\overline{x}^{(j)} - \overline{x}\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_i^{(j)} - \overline{x}^{(j)}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j\left(\overline{x}^{(j)}\right)^2 - 2\overline{x}\underbrace{\sum_{j=1}^{m} n_j\,\overline{x}^{(j)}}_{=n\,\overline{x}} + n\,\overline{x}^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)s_{x^{(j)}}^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j\left(\overline{x}^{(j)}\right)^2 - n\overline{x}^2
\end{aligned}$$

b) Man wendet Aufgabenteil a) und Aufgabenteil G3a) an mit $m = 2, n_1 = 20, n_2 = 1, x_i^{(1)} = x_i$ für $i = 1, \ldots, 20$ und $x_1^{(2)} = x_{21} = 10$. Bekannt sind $\overline{x}^{(1)} = 6.45$, $s_{x^{(1)}}^2 = 2.485$ sowie $\overline{x}^{(2)} = 10$.

$$\overline{x} = \frac{n_1}{n}\overline{x}^{(1)} + \frac{n_2}{n}\overline{x}^{(2)} = \frac{1}{21}(20 \cdot 6.45 + 1 \cdot 10) = 6.62$$

und

$$s_x^2 = \frac{1}{20}(19 \cdot 2.485 + 0 + 20 \cdot 6.45^2 + 1 \cdot 10^2 - 21 \cdot 6.62^2) = 2.95$$