# Maß- und Integrationstheorie

Manuskript zur Vorlesung in SS2006

Bálint Farkas
farkas@mathematik.tu-darmstadt.de

# Inhaltsverzeichnis

# § 0 Einführung

**Ziel:** Beschreibung von Volumina.

Bezeichne mit $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge, d.h., die Menge allen Teilmengen von $X$. Suche $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Für $E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots$ endliche oder unendliche Folge von disjunkten Mengen

$$\mu\Big(\bigcup_j E_j\Big) = \sum_j \mu(E_j).$$

ii) Sind $E$ und $F$ kongruent(Translation, Rotation, Spiegelung), dann ist $\mu(E) = \mu(F)$.

iii) $\mu([0,1]^n) = 1$ (Normalisierung).

**Vitali-Menge:** Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $[0,1]$ durch

$$x \sim y \quad \overset{\text{Def.}}{\iff} x - y \in \mathbb{Q}.$$

Sei $N \subseteq [0,1]$ diejenige Menge, welche genau einen Representanten jeder Äquivalenzklasse enthält (Auswahlaxiom!). Wir setzen

$$N_p := \{x + p : x \in N \cap [0, 1-p)\} \cup \{x + p - 1 : x \in N \cap [1-p, 1)\} \quad \text{für } p \in \mathbb{Q} \cap [0,1).$$

Wir haben $N = (N \cap [0, 1-p)) \cup (N \cap [1-p, 1))$, und so gilt

$$\mu(N) = \mu((N \cap [0,1-p)) \cup (N \cap [1-p,1))) = \mu(N \cap [0,1-p)) + \mu(N \cap [1-p,1))$$

Eigenschaft ii) ergibt

$$\mu(N) = \mu(N \cap [0,1-p)) + \mu(N \cap [1-p,1)) = \mu((N+p) \cap [p,1)) + \mu((N+p) \cap [0,p)) = \mu(N_p).$$

Bemerke, dass $N_p \cap N_q = \emptyset$ für $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Ist $z \in N_p \cap N_q$, so ist $z = x + p$ (oder $z = x + p - 1$) und $z = y + q$ (oder $z = y + q - 1$) mit $x, y \in N$. So folgt $x - y \in \mathbb{Q}$, also ist $x \sim y$. Daher gilt $x = y$ und $p = q$, oder $p - 1 = q$, oder $p = q - 1$). Aber $p, q \in [0,1)$ und so gilt $|p - q| < 1$, d.h., $p = q$ ist die einzige Möglichkeit.

Ferner gilt $[0,1) = \bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)}$. Denn sei $x \in [0,1)$, so gibt ein $y \in N$ mit $x \sim y$. D.h. $p := x - y \in \mathbb{Q}$, also gilt $x = y + p$. Sei $q = 1 + p$ falls $p < 0$ und $q = p$ sonst. Dann ist $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ und gilt $x \in N_q$.

Nun verwendet man iii):

$$\mu([0,1)) = \mu\Big(\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} N_p\Big) = \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(N_p) = \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \mu(N) = \begin{cases} 0, & \mu(N) = 0 \\ +\infty, & \mu(N) > 0. \end{cases}$$

So erhält man einen Widerspruch.

**Folgerung:** Es gibt keine Funktion mit Eigenschaften i), ii) und iii).

**Banach–Tarski Paradox:** Eine Kugel in endlich vielen Teile zerlegt werden, aus denen sich zwei Kugeln von Größe des Originals zusammensetzen lassen.

# § 1 $\sigma$-Algebren

Sei $X \neq \emptyset$ beliebige Menge.

**1.1. Definition.** Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *$\sigma$-Algebra* (über $X$), falls gilt:

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $A_j \in \mathcal{A}$ für $j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Algebra* (über $X$), falls i), ii) und iii') gelten, wobei

iii') $A_j \in \mathcal{A}$ für $j = 1, \ldots, N \Longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{A}$.

**Bemerkungen, Beispiele:**

a) iii) kann ersetzt werden durch

$$A_j \in A,\ j \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in A$$

[denn: $\cup A_j = (\cap A_j^c)^c$]

b) $\mathcal{A}$ $\sigma$-Algebra, $A_j \in \mathcal{A}$

$$\Longrightarrow \qquad \emptyset, \bigcup_{j=1}^{N} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j, \bigcap_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{A}$$

d. h. $\sigma$-Algebra ist abgeschlossen unter abzählbaren Mengenoperationen.

Zum Beweis: $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_i$ mit $B_i := \begin{cases} A_j, & 1 \leq j \leq N \\ \emptyset, & j > N \end{cases}$

c) Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. So ist $\mathcal{A}$ genau dann $\sigma$-Algebra, wenn es unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen abgeschlossen ist, d.h., für alle $A_j \in \mathcal{A}$ disjunkte Folge gilt $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

c) $\{X, \emptyset\}$ und $\mathcal{P}(X)$ sind $\sigma$-Algebren.

d) $\{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ ist $\sigma$-Algebra.

e) $\{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$ ist keine $\sigma$-Algebra, falls $X$ überabzählbar.

f) $\{\mathcal{A}_\alpha,\ \alpha \in I\}$ Familie von $\sigma$-Algebren über $X \Longrightarrow \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ ist $\sigma$-Algebra über $X$

**1.2. Definition.** Sei $\emptyset \neq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \ \sigma\text{-Algebra über } X, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$$

*die von $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma$-Algebra über $X$.*

**Bemerkung:** $A_\sigma(\mathcal{E})$ wegen §1 f) wohldefiniert und die kleinste $\sigma$-Algebra über $X$, die $\mathcal{E}$ enthält.

**Beispiel:**

i) $\mathcal{E}$ $\sigma$-Algebra $\Longrightarrow A_\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$

ii) $\mathcal{E} = \{A\} \Longrightarrow A_\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$

**1.3. Definition.** Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder allgemein topologischer Raum) und

$$\mathcal{O}_X := \{G \cap X : G \text{ offen in } \mathbb{R}^n\}.$$

Dann heißt:

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}_X) \quad \textit{Borelsche } \sigma\text{-Algebra von } X.$$

*B Borelsche Teilmenge* von $X$ *(Borel-Menge)* $\overset{\text{Def.}}{\iff} B \in \mathcal{B}(X)$.

**Bemerkung:** $A$ ist eine $G_\delta$-Menge in $X$, falls $A := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_j \cap X$ mit $G_j \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
$B$ ist eine $F_\sigma$-Menge in $X$, falls $B := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j \cap X$ mit $F_j \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

$\delta \approx$ Durchschnitt
$\sigma \approx$ Summe

Induktiv erhält man $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\delta\sigma\delta}$, usw. Mengen.

**1.4. Bemerkung.**

a) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F})$

b) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F})$

Borelmengen spielen wichtige Rolle: Sie werden von folgenden Mengensystemen erzeugt.

**1.5. Satz.** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ wird erzeugt von jedem der folgenden Mengensysteme:

i) offene Intervalle $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a < b\}$

ii) abgeschlossene Intervalle $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a < b\}$

iii) halboffene Intervalle $\mathcal{E}_3 = \{(a,b] : a < b\}$ oder $\mathcal{E}_4 := \{[a,b) : a < b\}$

iv) $\mathcal{E}_5 = \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ oder $\mathcal{E}_6 := \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}$

v) $\mathcal{E}_7 = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ oder $\mathcal{E}_8 := \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}$

**Beweis.** Die Mengensysteme $\mathcal{E}_j$, $j = 1,\dots,8$ sind alle in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthalten, denn für $j \neq 3,4$ die Mengen in $\mathcal{E}_j$ sind offen oder abgeschlossen. Ferner sind die Mengen in $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_4$ $G_\delta$-Mengen: $(a,b] = \bigcap_{n=1}^\infty (a, b+\frac{1}{n})$. Also $\mathcal{E}_j \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, und aus 1.4 folgt $A_\sigma(\mathcal{E}_j) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

*Umgekehrt:* jede offene Teilmenge $G$ von $\mathbb{R}$ ist abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen (ÜA), daher ist $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1)$, und nach 1.4 gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1)$. D.h. $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1)$, also folgt i). Ferner: $(a,b) = \cup_{n=1}^\infty [a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}] \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$. D.h. $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$, und wegen 1.4 ist $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$. Schon bekannt ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1)$, also folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$ und damit ii) auch.

Andere Fälle (analog) als ÜA. ∎

**1.6. Satz.** $f : X \to Y$ wobei $X, Y$ beliebige nichtleere Mengen.
Ist $\mathcal{N}$ eine $\sigma$-Algebra auf $Y$, so ist $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{N}\}$ $\sigma$-Algebra auf $X$.

**Beweis.** ∎

**1.7. Satz.** $f : X \to Y$ wobei $X, Y$ beliebige nichtleere Mengen.
Ist $\mathcal{M}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$, so ist $\{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ $\sigma$-Algebra auf $Y$.

**Beweis.** ∎

# § 2 Maße

Es sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine $\sigma$-Algebra.

**2.1. Definition.**

a) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt *Maß* (auf $\mathcal{A}$), falls

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k \Longrightarrow \mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

(diese Eigenschaft heißt *$\sigma$-Additivität*)

Eigenschaft ii) impliziert

ii') *(endlich additiv)*: $A_j \in \mathcal{A}$, $1 \leq j \leq N$, $A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k \Longrightarrow \mu(\bigcup\limits_{j=1}^{N} A_j) = \sum\limits_{j=1}^{N} \mu(A_j)$.

[Wähle für $j > N$, $A_j = \emptyset$ und verwende i) und ii).]

b) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *Maßraum*, falls gilt

$\alpha$) $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $X$

$\beta$) $\mu$ Maß auf $\mathcal{A}$.

c) Ist $\mu(X) < +\infty$, so heißt $\mu$ *endlich*

Ist $\mu(X) = 1$, so heißt $\mu$ *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

d) Falls $X = \bigcup\limits_{j} A_j$ mit $A_j \in \mathcal{A}$, $\mu(A_j) < +\infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so heißt $\mu$ *$\sigma$-endlich.*

**2.2. Satz [positive Linearkombination von Maßen].** Sei $X \neq \emptyset$ beliebige Menge $\mathcal{A}$ $\sigma$-Algebra über $X$. Ferner sei $\mu_\alpha : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ Maß und $c_\alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in I$. Dann definiert

$$\mu(A) := \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mu_\alpha(A) \overset{\text{Def.}}{:=} \sup\Big\{\sum_{j=1}^{N} c_{\alpha_j} \mu_{\alpha_j}(A),\ \alpha_j \in I, N \in \mathbb{N}\Big\}$$

auch ein Maß.

Konstruktion von Maßen ist schwierig, also zunächst einfache Beispiele.

**2.3. Beispiele.** Sei $X \neq \emptyset$ beliebige Menge $\mathcal{A}$ $\sigma$-Algebra über $X$.

**a) 0-Maß:** Wir setzen $\nu(A) := 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

**b) $\infty$-Maß:** Wir setzen $\mu(A) := +\infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$ und $\mu(\emptyset) = 0$.

**c) Dirac-Maß:** Wir setzen

$$\delta_x : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+, \quad \delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

So heißt $\mu := \delta_x$ *Dirac-Maß* oder *Punktmaß* im Punkt $x$.

**d) Zählmaß:** Wir setzen

$$\mu(A) := \begin{cases} \operatorname{card}(A), & A \text{ endlich}, \\ +\infty, & A \text{ unendlich}. \end{cases}$$

Dann heißt $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *Zählmaß*. Es gelten

$\alpha$) $\mu = \sum_{x \in X} \delta_x$.

$\beta$) $\mu$ ist endlich $\Longleftrightarrow X$ endlich.

$\gamma$) $\mu$ ist $\sigma$-endlich $\Longleftrightarrow X$ abzählbar.

**e)** Sei $X$ überabzählbar und $\{A \subseteq X : A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$. Wir setzen

$$\mu : \mathcal{A} \to [0,1], \quad \mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & A \text{ überabzählbar.} \end{cases}$$

Grundlegende Eigenschaften von Maßen:

**2.4. Theorem.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gilt für $A, B \in \mathcal{A}$:

a) *(Monotonie):* $A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

b) $\mu(A) < +\infty, A \subseteq B \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

c) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

d) *($\sigma$-Subadditivät):* $A_j \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

e) *(Stetigkeit von unten):* $A_j \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \Longrightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$

f) *(Stetigkeit von oben):* $A_j \in \mathcal{A}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ und $\mu(A_1) < +\infty \Longrightarrow \mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.

**Beweis.** a), b) $A \subseteq B \Longrightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Longrightarrow \mu(B) \geq \mu(A)$. Ist $\mu(A) < +\infty$, so gilt $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$.

c) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$$\Downarrow$$

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ und $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$
Ist $\mu(B \setminus A) < +\infty \Longrightarrow \mu(A \cap B) = \mu(B) - \mu(B \setminus A) \Longrightarrow \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(B) - \mu(B \setminus A) + \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B)$.
Ist $\mu(B \setminus A) < +\infty$, so ist $\mu(B) = \mu(B \cup A) = +\infty$ und c) trivial.

d) Wir setzen $B_1 := A_1$, $B_k := A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ für $k > 1$. Dann gilt $B_k \subseteq A_k$ und $B_j \cap B_k = \emptyset$, $j \neq k$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Daher

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

e) Setze $A_0 = \emptyset$, $B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geq 1$. Dann $B_j \cap B_k = \emptyset$, $j \neq k$ und $A_m = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$, somit ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Also

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

f) Setze $B_j = A_1 \setminus A_j$. So ist $B_j \subseteq B_{j+1}$, und damit ist e) verwendbar:

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(\cap_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(A_1 \setminus \cap_{j=1}^{\infty} A_j) &= \mu\Big(A_1 \cap \big(\cap_{j=1}^{\infty} A_j\big)^c\Big) = \mu\Big(A_1 \cap \cup_{j=1}^{\infty} A_j^c\Big) = \mu\Big(\cup_{j=1}^{\infty} A_1 \cap A_j^c\Big) \\ &= \mu\Big(\cup_{j=1}^{\infty} A_1 \setminus A_j\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

∎

**2.5. Definition.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

a) $N \in \mathcal{A}$ heißt *$\mu$-Nullmenge*, falls $\mu(N) = 0$.

b) $\mu$ heißt *vollständig*, falls alle Teilmengen von $\mu$-Nullmengen zu $\mathcal{A}$ gehören.

**2.6. Satz.** Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Dann existiert ein vollständiger Maßraum $(X, \mathcal{M}', \mu')$ mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ und $\mu'|_{\mathcal{M}} = \mu$.

**Beweis.** ∎

# § 3 Äußere Maße

Ziel dieses Paragraphen ist es Techniken zu entwickeln um Maße zu konstruieren.

**3.1. Definition.** Sei $X \neq \emptyset$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$. Eine Funktion $\mu^\star : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ heißt *relativ äusseres Maß* (outer measure) auf $X$, falls

i) $\mu^\star(\emptyset) = 0$,

ii) *(Monotonie):* $A \subseteq B \Longrightarrow \mu^\star(A) \leq \mu^\star(B)$,

iii) *(Subadditivität):* $A_j \in \mathcal{P}(X)$, für alle $j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mu^\star(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_j)$.

Ist $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$, dann heißt ein relativ äusseres Maß auf $\mathcal{E}$ *äusseres Maß über* $X$.

**Bemerkung:** Jedes Maß ist ein relativ äusseres Maß.

**3.2. Theorem [Konstruktion äusseren Maßen].** Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$. Sei $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ so daß $\rho(\emptyset) = 0$. Für $A \subseteq X$ definiere

$$\mu^\star(A) := \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j); E_j \in \mathcal{E} \text{ und } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \Big\}$$

(Hier benutzt man die Konvention $\inf \emptyset = +\infty$.) Dann ist $\mu^\star$ ein äußeres Maß auf $X$.

**Beweis.** Klar ist $\mu^\star(\emptyset) = 0$.

Zur Monotonie: $A \subseteq B$ und $B \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ mit $B_j \in \mathcal{E} \Longrightarrow A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ mit $B_j \in \mathcal{E}$.

Zur Subadditivität: Seien $A_j \in \mathcal{P}(X)$m und $\varepsilon > 0$. Wenn $\mu^\star(A_j) = +\infty$ für ein $j \in \mathbb{N}$, dann ist die Ungleichung in iii) trivial. Also für jede $\in \mathbb{N}$ existiert $E_j^k \in \mathcal{E}$ mit

$$A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^\star(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ferner

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k \quad \Longrightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \big(\mu^\star(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_j) + \varepsilon.$$

Da hier $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhält man die Behauptung. ∎

**3.3. Beispiel.** Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ nennen wir

$$\operatorname{vol}_n(a, b) := \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j) & \text{falls} \quad a \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das *n-dimensionale Volumen* des Intervalls $(a, b)$. Ferner sei $\mathcal{J}^n := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n, a \leq b\}$. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nennen wir

$$\lambda^\star(A) := \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}_n(I_j) : I_j \in \mathcal{J}^n \text{ und } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \Big\}$$

das *n-dimensionale äußere Lebesguesche Maß* (nach 3.2 wohldefiniert, wobei $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{E} = \mathcal{J}^n$).

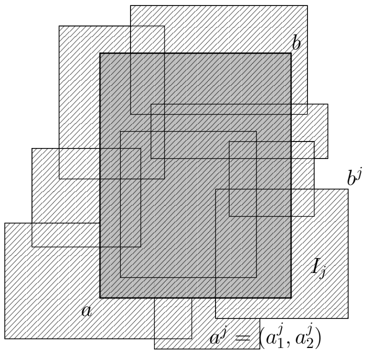
**3.4. Satz.** Es gelten $\lambda_n^\star([a, b]) = \operatorname{vol}_n(a, b)$, $\lambda_n^\star((a, b)) = \operatorname{vol}_n(a, b)$, $\lambda_n^\star([a, b)) = \operatorname{vol}_n(a, b)$ und $\lambda_n^\star((a, b]) = \operatorname{vol}_n(a, b)$.

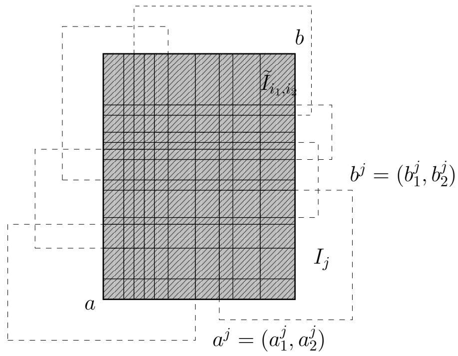
**Beweis.** Für ein Intervall $I$ bezeichnen wir mit $I^\varepsilon$ das um das Mittepunkt des Intervals durch $(1+\varepsilon)$ vergrößerte Intervall. Zum Beispiel für $I=[a,b]$ ist $I^\varepsilon=[a-\varepsilon\frac{b-a}{2}, b+\varepsilon\frac{b-a}{2}]$.
Wir betrachten das Intervall $[a,b]$, $a\le b$. Setze $r=(b-a)/2\in\mathbb{R}^n$ und sei $\varepsilon>0$. Betrachte die Überdeckung $[a,b]\subseteq(a-\varepsilon r, b+\varepsilon r)$ mit $(a-\varepsilon r,b+\varepsilon r)\in\mathcal{J}^n$ und $\mathrm{vol}_n(a-\varepsilon r,b+\varepsilon r)=(1+\varepsilon)^n\mathrm{vol}_n(a,b)$. Dies gilt für $\varepsilon>0$ beliebig, so folgt $\lambda_n^\star([a,b])\le\mathrm{vol}_n(a,b)$.

Sei jetzt $\varepsilon>0$ und $[a,b]\subseteq\bigcup_{j\in\mathbb{N}}I_j$, $I_j\in\mathcal{J}^n$ eine Überdeckung mit

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{vol}_n(I_j)\le\lambda_n^\star([a,b])+\varepsilon.$$

Da $[a,b]$ kompakt ist können wir eine endliche Teilüberdeckung $(a,b)\subseteq\bigcup_{j=1}^N I_j$ wählen.




Hier sind $I_j=(a_1^j,b_1^j)\times\cdots\times(a_n^j,b_n^j)$, $j=1,\ldots,N$. Setze $X_k:=\{a_k^j : a_k\le a_k^j\le b_k,\ 1\le j\le N\}\cup\{b_k^j : a_k\le a_k^j\le b_k,\ 1\le j\le N\}$ die Mengen allen $k$ten Koordinaten der Intervallen. Wir nennen die Elementen in $X_k\cup\{a_k,b_k\}$ um: $X_k=\{a_k=:t_k^0<t_k^1<t_k^2<\cdots<t_k^{N_k}:=b_k\}$, $k=1,\ldots,n$. Wir setzen weiter $\widetilde{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}:=(t_1^{i_1-1},t_1^{i_1-1})\times\cdots\times(t_n^{i_n-1},t_n^{i_n-1})$, $1\le i_k\le N_k$, $1\le k\le n$. So ist jedes Intervall $\widetilde{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ mit mindestens einem $I_j$ überdeckt. Ferner sind $\widetilde{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ paarweise disjunkt. So erhält man

$$\mathrm{vol}_n(a,b)=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\mathrm{vol}_n(\widetilde{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n})\le\sum_{j=1}^{N}\mathrm{vol}_n(I_j)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{vol}_n(I_j)\le\lambda_n^\star([a,b])+\varepsilon.$$

Sei $\delta>0$. Durch die Vergrößerung der Intervallen erhalten wir eine Überdeckung

$$[a,b]\subseteq\bigcup_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\widetilde{I}^\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$$

mit

$$\mathrm{vol}_n(a,b)\le\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\mathrm{vol}_n(\widetilde{I}^\delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n})=(1+\delta)^n\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\mathrm{vol}_n(\widetilde{I}_{i_1,i_2,\ldots,i_n})\le(1+\delta)^n(\lambda_n^\star([a,b])+\varepsilon).$$

Dies gilt für alle $\delta>0$, also $\mathrm{vol}_n(a,b)\le\lambda_n^\star([a,b])+\varepsilon$. Da hier $\varepsilon>0$ beliebig ist, so folgt $\mathrm{vol}_n(a,b)\le\lambda_n^\star([a,b])$.

Die andere Fälle kann man mit ähnlichen Techniken beweisen. In Korollar 3.10 geben wir einfachere Beweise. ■

**Bemerkung:** Das Argument im obigen Beweist zeigt, dass für $\mathcal{E}=\{[a,b] : a,b\in\mathbb{R}^n,\ a\le b\}$, und $\rho=\mathrm{vol}_n$ bekommt man, dasselbe äußere Maß $\lambda_n^\star$.

**3.5. Definition [Carathéodory-Messbarkeit].** Sei $\mu^\star$ äußeres Maß auf $X$.
$A\subseteq X$ heißt *$\mu^\star$-messbar*: $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu^\star(H)=\mu^\star(H\cap A)+\mu^\star(H\cap A^c)$ für alle $H\subseteq X$.

**Bemerkung:**

a) $H = (H \cap A) \cup (H \cap A^c) \Longrightarrow \mu^\star(H) \leq \mu^\star(H \cap A) + \mu^\star(H \cap A^c)$, d.h., $A$ ist $\mu^\star$-messbar $\Longleftrightarrow$ $\mu^\star(H) \geq \mu^\star(H \cap A) + \mu^\star(H \cap A^c)$ für alle $H \subseteq X$.

b) $A$ ist $\mu^\star$-messbar $\Longleftrightarrow$ $A^c$ $\mu^\star$-messbar.

**3.6. Theorem [Carathéodory, 1918].** Es sei $\mu^\star$ äußeres Maß auf $X$ und

$$\mathcal{M}_{\mu^\star} := \{A \subseteq X : A \ \mu^\star\text{-messbar}\}.$$

Dann ist $\mathcal{M}$ ist $\sigma$-Algebra über $X$ und $\mu := \mu^\star|_{\mathcal{M}}$ ist vollständiges Maß auf $\mathcal{M}$ *(das von $\mu^\star$ induzierte Maß).*

**Beweis.** Klar ist $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Die obige Bemerkung b) gibt, dass $A^c \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$, falls $A \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$.

Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ eine Algebra ist. Sei also $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$ und $H \subseteq X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mu^\star(H) &= \mu^\star(H \cap A) + \mu^\star(H \cap A^c) \\
&= \mu^\star(H \cap A \cap B) + \mu^\star(H \cap A \cap B^c) + \mu^\star(H \cap A^c \cap B) + \mu^\star(H \cap A^c \cap B^c) \\
&\geq \mu^\star(H \cap (A \cup B)) + \mu^\star(H \cap (A \cup B)^c).
\end{aligned}$$

So aus Bemerkung a) folgt, $A \cup B \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ unter abzählbaren, *disjunkten* Vereinigung abgeschlossen ist. Bemerke, dass für $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^s \star (B)$. In der Tat, für solchen $A$ und $B$ haben wir $\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star((A \cup B) \cap A) + \mu^\star((A \cup B) \cap A^c) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B)$.

Nun seien $A_j \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$, $j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Zu zeigen ist $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Setze $B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j$ und $B := \bigcup_{j=1}^\infty B_j$. Für $H \subseteq X$ gilt

$$\mu^\star(H \cap B_n) = \mu^\star(H \cap B_n \cap A_n) + \mu^\star(H \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^\star(H \cap A_n^c) + \mu^\star(H \cap B_{n-1}),$$

so erhält man induktiv

$$\mu^\star(H \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^\star(H \cap A_j).$$

Da $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ eine Algebra ist, gilt $B_n \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Daher

$$\begin{aligned}
\mu^\star(H) = \mu^\star(H \cap B_n) + \mu^\star(H \cap B_n^c) &= \sum_{j=1}^n \mu^\star(H \cap A_j) + \mu^\star(H \cap B_n^c) \\
&\geq \sum_{j=1}^n \mu^\star(H \cap A_j) + \mu^\star(H \cap B^c).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mu^\star(H) &\geq \sum_{j=1}^\infty \mu^\star(H \cap A_j) + \mu^\star(H \cap B^c) \\
&\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\geq} \mu^\star(\bigcup_{j=1}^\infty H \cap A_j) + \mu^\star(H \cap B^c) = \mu^\star(H \cap B) + \mu^\star(H \cap B^c).
\end{aligned}$$

So folgt die $\mu^\star$-Messbarkeit von $B$ und $\mu^\star(B) = \sum_{j=1}^\infty \mu^\star(B_j)$ auch.

Zur Vollständigkeit: Sei $N \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$ mit $\mu^\star(N) = 0$ und $A \subseteq N$. Dann gilt

$$\mu^\star(H) \leq \mu^\star(H \cap A) + \mu^\star(H \cap A^c) \leq \mu^\star(N) + \mu^\star(H) = 0 + \mu^\star(H).$$

Es gilt hier überall "=", und so ist $A \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. ∎

**Notation:** Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf_{a\in A,\, b\in B} |a-b|, \quad \operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} |x-y|$$

**3.7. Definition.** Sei $\mu^\star$ äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $\mu^\star$ *metrisch*, falls $\mu^\star(A\cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B)$ für alle $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) > 0$.

**3.8. Satz.** Sei $\mu^\star$ äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^\star} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^\star \text{ ist metrisch.}$$

**Beweis.** "$\Leftarrow$": Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) > 0$. Dann $\overline{A} \cap B = \emptyset$, und nach Voraussetzung gilt $\overline{A} \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. D.h.

$$\mu^\star(A\cup B) = \mu^\star((A\cup B)\cap \overline{A}) + \mu^\star((A\cup B)\cap \overline{A}^c) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B).$$

"$\Rightarrow$": Wir zeigen, dass, wenn $G$ offen ist, gilt $G \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Setze $G_k := \{x \in G : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \frac{1}{k}\}$. Sei ferner $U_k := G_k \setminus G_{k-1}$. Für alle $H \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt $H \cap G = H \cap G_m \cup \bigcup_{k=m+1}^\infty H \cap U_k$. Setze $a_k := \mu^\star(H \cap G_k)$. So erhält man$\mu^\star(H \cap G) \cap \leq \mu^\star(H \cap G_m) + \sum_{k=m+1}^\infty a_k$.

Falls $\sum_k a_k < +\infty$, dann gilt $\mu^\star(H\cap G) \leq \lim_{m\to\infty} \mu^\star(H \cap G_m)$.

Falls $\sum_k a_k = +\infty$, dann gilt $\sum_k a_{2k} = +\infty$ oder $\sum_k a_{2k+1} = +\infty$. Wegen Symmetrie können wir OBDA annehmen $\sum_k a_{2k} = +\infty$. Bemerke, dass $\operatorname{dist}(U_{2k}, U_{2l}) > 0$ falls $k \neq l$. Nach Voraussetzung ist $\mu^\star$ metrisch, also gilt

$$\sum_{k=1}^N a_{2k} = \sum_{k=1}^N \mu^\star(H \cap U_{2k}) = \mu^\star(\bigcup_{k=1}^N H \cap U_{2k}) \leq \mu^\star(H \cap G_{2N}).$$

So folgt $\lim_{N\to\infty} \mu^\star(H \cap G_{2N}) = +\infty$, und damit $\mu^\star(H \cap G) \leq \lim_{m\to\infty} \mu^\star(H\cap G_m)$.

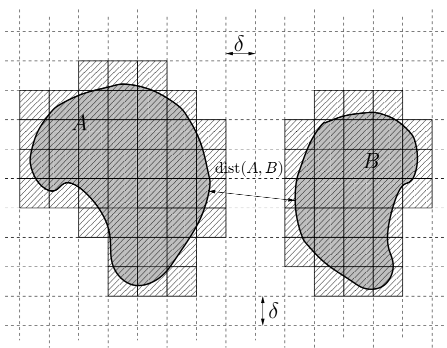
Wir haben gezeigt, dass $\mu^\star(H \cap G) \leq \lim_{m\to\infty} \mu^\star(H \cap G_m)$. Daraus folgt:

$$\mu^\star(H) \geq \mu^\star((H \cap G_m) \cup (H \setminus G)) = \mu^\star(H \cap G_m) + \mu^\star(H \setminus G).$$

Für $m \to \infty$ erhält man $\mu^\star(H) \geq \lim_{m\to\infty} \mu^\star(H \cap G_m) + \mu^\star(H \setminus G) \geq \mu^\star(H \cap G) + \mu^\star(H \setminus G)$, damit die Behauptung. ■

**3.9. Satz.** Das $n$-dimensionale äußere Lebesguesche Maß ist ein metrisches äußeres Maß.

**Beweis.** Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) > 0$. Sei jetzt $0 < \delta < \frac{\operatorname{dist}(A,B)}{2\sqrt{n}}$. Betrachte den Gitter mit Seitenlange $\delta$.




Wähle die abgeschlossene Würfeln $I_j$, $j = 1, \ldots, N$ bzw. $J_i$, $i = 1, \ldots, M$ in diesem Gitter mit $I_j \cap A \neq \emptyset$ und $J_i \cap B \neq \emptyset$. Dann sind $I_j \cap J_i = \emptyset$ (denn $\operatorname{diam}(I_j) = \operatorname{diam}(J_i) = \delta/2 < d$). Somit gilt

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, \quad B \subseteq \bigcup_{i=1}^M J_i, \quad A\cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j \cup \bigcup_{i=1}^M J_i,$$

$$\text{und} \quad \sum_{j=1}^N \operatorname{vol}_n(I_j) + \sum_{i=1}^M \operatorname{vol}_n(J_i) \geq \lambda_n^\star(A) + \lambda_n^\star(B).$$

Daher erhält man $\lambda_n^\star(A\cup B) \geq \lambda_n^\star(A) + \lambda_n^\star(B)$. Dies zusammen mit Subadditivität liefert die Behauptung. ■

**3.10. Korollar.** Es gelten $\lambda_n^\star([a,b]) = \mathrm{vol}_n(a,b)$, $\lambda_n^\star((a,b)) = \mathrm{vol}_n(a,b)$, $\lambda_n^\star([a,b)) = \mathrm{vol}_n(a,b)$ und $\lambda_n^\star((a,b]) = \mathrm{vol}_n(a,b)$.

**Beweis.** Den Fall $[a,b]$ wissen wir schon. Die andere Behauptungen folgen daraus, denn gelten:

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \tfrac{1}{n}\mathbf{1}, b - \tfrac{1}{n}\mathbf{1}], \quad [a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \tfrac{1}{n}\mathbf{1}], \quad (a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \tfrac{1}{n}\mathbf{1}, b], \quad .$$

So kann man die Monotonie des Maßes $\lambda_n^\star\big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ verwenden. ∎

# § 4 Lebesguesche Maße

**4.1. Definition.**

a) Das vom äußeren Lebesgueschen Maß $\lambda_n^\star$ induzierte Maß $\lambda_n$ heißt *n-dimensionales Lebesguesches Maß*.

b) $\mathcal{L}^n := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ ist } \lambda_n\text{-messbar}\}$ heißt die *σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen von* $\mathbb{R}^n$.

Folgender Satz läßt sich mit Resultaten aus §3 beweisen.

**4.2. Theorem.** Es gilt

i) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda_n)$ ist ein $\sigma$-endlicher vollständiger Maßraum mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^n$.

ii) Für jedes Intervall $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n, (a \leq b)$ gilt

$$\lambda_n([a,b]) = vol_n(a,b) = \prod_{k=1}^{n}(b_n - a_n).$$

iii) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Longrightarrow \lambda_n(K) < +\infty$.

**Beweis.** Nur iii) is noch nicht bewiesen. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $K \subseteq [a,b]$. Die Monotonie von $\lambda_n$ liefert $\lambda_n(K) \subseteq \lambda_n([a,b]) < +\infty$. ■

**4.3. Korollar.** Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
$N$ ist *Lebesgue-Nullmenge*, d.h. $\lambda_n(N) = 0 \Longleftrightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge von offenen Intervallen $(I_j)_{j \geq 1}$ mit

$$N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} vol_n(I_j) < \varepsilon.$$

**Beweis.** Da $\lambda_n^\star(N) = \lambda_n(N) = 0$, die Behauptung folgt aus der Definition von $\lambda_n^\star$ (siehe 3.2). ■

**4.4. Korollar.** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abzählbar $\Longrightarrow A$ ist Lebesgue-Nullmenge.

**Beweis.** Wir zeigen, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda_n(\{x\}) = 0$. In der Tat: $\{x\} \subseteq (x - \varepsilon\mathbf{1}, x + \varepsilon\mathbf{1})$, und $\lambda_n((x - \varepsilon\mathbf{1}, x + \varepsilon\mathbf{1})) = (2\varepsilon)^n$. Also ist $\lambda_n(\{x\}) = 0$, und die Behauptung folgt aus der $\sigma$-Additivität von $\lambda_n$. (Hier ist $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.) ■

**4.5. Satz.** Für $A \in \mathcal{L}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_n(A) &\stackrel{i)}{=} \inf\{\lambda_n(G) : G \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}, A \subseteq G\} \\ &\stackrel{ii)}{=} \sup\{\lambda_n(K) : K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt}, K \subseteq A\}. \end{aligned}$$

**Beweis.** i): Da $A \subseteq G$ impliziert $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(G)$, so ist "$\leq$" offensichtlich. Ist $\lambda_n(A) = +\infty$ so folgt sogar "=". Sei also $\lambda_n(A) < +\infty$ und $\varepsilon > 0$. Nach Definition existiert eine Überdeckung $A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, $I_j \in \mathcal{J}^n$, mit $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}_n(I_j) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$. Setze $G := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, so ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und wegen $\sigma$-Subadditivität gilt $\lambda_n(G) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_n(I_j)$ und so $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$. Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, also ist "$\geq$" in i) bewiesen.

ii): Sei zunächst $A$ beschränkt. Dann existiert ein $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $A \subseteq C$. Es gilt dann $\mathbb{R}^n \setminus C \in \mathcal{L}^n$. Für $\varepsilon > 0$ existiert $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $C \setminus A \subseteq G$ und $\lambda_n(G) \leq \lambda_n(C \setminus A) + \varepsilon$ (siehe Teil i)). Setze $K := C \setminus G$, dann ist natürlich $K$ kompakt und gilt $K \subseteq A$, $C \subseteq K \cup G$. Ferner

$$\lambda_n(C) \leq \lambda_n(K) + \lambda_n(G) \leq \lambda_n(K) + \lambda_n(C \setminus A) + \varepsilon = \lambda_n(K) + \lambda_n(C) - \lambda_n(A) + \varepsilon.$$

Damit erhalten wir $\lambda_n(A) - \varepsilon \leq \lambda_n(K)$, und so folgt die Behauptung.

Sei jetzt $A$ unbeschränkt. Setze $A_j := A \cap (\overline{B}(0, j+1) \setminus \overline{B}(0, j))$, welche Mengen natürlich disjunkt sind. Für $\varepsilon > 0$ und $j \in \mathbb{N}$ existiert nach dem Obigen $K_j \subseteq A_j$ mit $\lambda_n(K_j) \geq \lambda_n(A_j) - \varepsilon/2^j$. Wir setzen $H_N := \bigcup_{j=1}^N K_j$. Dann ist $H_N \subseteq A$ kompakt und gilt $\lambda_n(H_N) \geq \lambda_n(\bigcup_{j=1}^N A_j) - \varepsilon$. Die Stetigkeit von des Maßes $\lambda_n$ liefert $\lambda_n(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\bigcup_{j=1}^N A_j)$, und so die Behauptung. ■

**4.6. Lemma.** Sei $A \in \mathcal{L}^n$. Dann existiert eine $F_\sigma$-Menge $F$ und eine $G_\delta$-Menge $G$ derart, dass $F \subseteq A \subseteq G$ und $\lambda_n(F) = \lambda_n(A) = \lambda_n(G)$.

**Beweis.** Sei erst $\lambda_n(A) < +\infty$. Für jede $j \in \mathbb{N}$ erhält man durch das Verwenden von 4.5 kompakte Mengen $K_j$ und offene Mengen $G_j$, mit $K_j \subseteq A \subseteq G_j$, $K_j \subseteq K_{j+1}$, $G_j \supseteq G_{j+1}$ und

$$\lambda_n(A) - \frac{1}{j} \leq \lambda_n(K_j) \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(G_j) \leq \lambda(A) + \frac{1}{j}.$$

Somit hat man für $F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$ und $G := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_j$, dass $\lambda_n(F) = \lim_{j\to\infty} \lambda_n(K_j) = \lambda_n(A)$ und $\lambda_n(G) = \lim_{j\to\infty} \lambda_n(G_j) = \lambda_n(A)$.

Sei jetzt $\lambda_n(A) = +\infty$. So gilt $\lambda_n(G) \geq \lambda_n(A) = +\infty$ für alle $G \supseteq A$ $G_\delta$-Mengen. Wähle $K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq A$ kompakt mit $\lambda_n(K_j) \geq j$ (siehe 4.5). Setze $F = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$. Die Stetigkeit des Maßes $\lambda_n$ von unten liefert $\lambda_n(F) = \lim_{j\to\infty} \lambda_n(K_j) = \lambda_n(A) = +\infty$. ■

**Bemerkung:** In obigen Satz kann $F$ als abzählbare Vereinigung kompakten Mengen gewählt werden (dies ist eigentlich im Beweis gezeigt). Solche Mengen nennen wir *$\sigma$-kompakt*.

**4.7. Satz.** Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:
$A \in \mathcal{L}^n \iff A = S \cup N$, wobei $N$ Lebesgue-Nullmenge und $S$ als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen dargestellt werden kann.

**Beweis.** "$\Leftarrow$": Sei $S$ und $N$ wie in der Aussage, so gilt $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^n$, und so $S \cup N \in \mathcal{L}^n$.

"$\Rightarrow$": $\lambda_n$ ist $\sigma$-endlich: $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ mit $\lambda_n(A_j) < +\infty$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert $S_j \subseteq A_j$, $S_j$ abzählbare Vereinigung kompakten Mengen und $\lambda_n(S_j) = \lambda_n(A_j)$. Setze $N_j := A_j \setminus S_j$. So gilt $\lambda_n(N_j) = \lambda_n(A_j \setminus S_j) = 0$, und $N := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j$ ist auch eine Lebesgue-Nullmenge ($\sigma$-Subadditivität). Es gilt $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j \cup S_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_j = N \cup S$, mit $S = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} S_j$. Hier ist $S$ auch abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen, also folgt die Behauptung. ■

**4.8. Definition.** Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Das Maß $\mu$ heißt *(Borel)-regulär*, falls

i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}$ (d.h. alle Borel-Mengen sind messbar).

ii) $\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}, A \subseteq G\} = \sup\{\mu(K) : K \subseteq X \text{ kompakt}, K \subseteq A\}$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Gilt außerdem

iii) $\mu(K) < +\infty$ für alle $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so heißt $\mu$ *Radon-Maß*. Ferner definiert man: Die Restriktion des Lebesguemaßes $\lambda_n$ auf $\mathcal{B}^n$ heißt *n-dimensionales Borel-Lebesgue-Maß.*

Wir betrachten nun maßtheoretische und topologische Eigenschaften gemeinsam.

**Erinnerung:** Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : X \to \mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls $L \geq 0$ existiert mit $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in X$.

**4.9. Satz.** Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge und $f : N \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. $\Longrightarrow$ $f(N)$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

**Beweis.** Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n$ die $\infty$-*Norm*: $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ (auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Norme äquivalent). Nach Voraussetzung gibt es ein $L \geq 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x-y\|_\infty \quad \text{für alle } x, y \in N. \tag{1}$$

Da $N$ eine Nullmenge ist, existiert eine Überdeckung $N \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$ mit $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}_n(I_j) < \varepsilon$. OBDA können wir annehmen, dass $I_j$ alle Würfel mit Kantenlänge $\ell_j$ sind. Wegen (1) existiert ein $W_j$ Würfel mit Kantenlänge $L \cdot \ell_j$ so, dass $f(N \cap I_j) \subseteq W_j$. Dann gilt

$$f(N) = f(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} N \cap I_j) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(N \cap I_j) \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j,$$

$$\text{und} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}_n(W_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} L^n \ell_j^n = L^n \sum_{j\in\mathbb{N}} \ell_j^n = L^n \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}_n(I_j) < L^n\varepsilon.$$

Hier ist $\varepsilon > 0$ beliebig, somit folgt die Behauptung. ■

**4.10. Lemma.** Jede offene Teilmenge $U$ von $\mathbb{R}^n$ kann dargestellt werden als abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle der Form $[a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^n$, oder als abzählbare Vereinigung nicht unbedingt disjunkter aber kompakter Intervalle $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^n$.

**Beweis.** ■

**4.11. Satz.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ *($f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar)* und $N \subseteq G$ eine Lebesgue-Nullmenge.
$\Longrightarrow$ $f(N)$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

**Beweis.** Wir schreiben $G = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ mit $I_j = [a_j, b_j]$ kompakt (siehe 4.10). Die Ableitung $f' : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist nach Voraussetzung stetig, so ist sie auf den kompakten Menge $I_j$ beschränkt: $\|f'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq C_j$ für alle $x \in I_j$. Der Mittelwertsatz zeigt, dass $|f(x) - f(y)| \leq \sup_{x\in I_j} |x-y| \leq C_j|x-y|$. So ist $f$ auf $I_j$ Lipschitz, und aus Satz 4.9 folgt, dass $f(N \cap I_j) = 0$. Somit ist $f(N) = f(N \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(N \cap I_j) = 0$. ■

**4.12. Korollar.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und $M \subseteq G$ sei Lebesgue-messbar.
$\Longrightarrow$ $f(M)$ ist Lebesgue-messbar.

**Beweis.** Nach Satz 4.7 läßt $M$ sich als $M = S \cup N$ mit $S$ $\sigma$-kompakt und $N$ Lebesgue-Nullmenge zu schreiben. So ist $S = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$ mit $K_j$ kompakt, und $f(M) = f(S) \cup f(N) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(K_j) \cup f(N)$. Hier ist $f(K_j)$ kompakt (denn $f$ ist stetig) und $f(N)$ Lebesgue-Nullmenge (verwende Satz 4.11). Dies zeigt $f(M) \in \mathcal{L}^n$. ■

**4.13. Satz.** $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda_n)$ ist *translationsinvariant*, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{L}^n$ gilt $a + A \in \mathcal{L}^n$ und $\lambda_n(a + A) = \lambda_n(A)$. Ferner $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow a + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

**Beweis.** Klar, dass $\mathrm{vol}_n$ translationsinvariant ist. $\Longrightarrow$ $\lambda_n^\star$ translationsinvariant $\Longrightarrow$ ($\lambda_n$ translationsinvariant und $A \in \mathcal{L}^n$ impliziert $a + A \in \mathcal{L}^n$).

Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Trivial ist: $G$ offen $\Longrightarrow a+G$ offen. Setze $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x-a$. So ist $f^{-1}(x) = x+a$. Sei ferner $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra, und enthält alle offene Mengen, so ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}$ (siehe 1.4). ∎

**4.14. Theorem [Charakterisierung des Lebesgue–Maßes].** Das $n$-dim. Borel-Lebesgue Maß ist das einzige reguläre, translationsinvariante Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu([0,\mathbf{1})) = 1$.

**Beweis.** *Schritt 1:* Sei $a, b \in \mathbb{Q}^n$ mir $a \le b$. Translationsinvarianz $\Longrightarrow$ $\mu([a,b)) = \mu([0,b-a)+a) = \mu([0,b-a))$. Da $b - a \in \mathbb{Q}^n$, so ist $b-a = (\frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \dots, \frac{m_n}{m})$ für ein $m_j, m \in \mathbb{Z}$. D.h. $[0, b-a)$ ist darstellbar als paarweise disjunkte Vereinigung von $m_1 m_2 \cdots m_n$ Intervallen, welche aus $[0, \frac{1}{m}\mathbf{1})$ durch Translation entstehen. Wegen Translationsinvarianz erhalten wir $\mu([0,b-a)) = m_1 m_2 \cdots m_n \mu([0, \frac{1}{m}\mathbf{1}))$.

*Schritt 2:* Wir bestimmen zunächst $\mu([0, \frac{1}{m}\mathbf{1}))$. Da $\mu([0,\mathbf{1})) = m^n \mu([0, \frac{1}{m}\mathbf{1}))$, so gilt $\mu([0, \frac{1}{m}\mathbf{1}) = \frac{1}{m^n}$. Dies mit Schritt 1 zeigt $\mu([a,b)) = \mu([0,b-a)) = \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{m^n} = \lambda_n([0,b-a)) = \lambda_n([a,b))$.

*Schritt 3:* Lemma 4.10 gibt dass $\lambda_n(G) = \mu(G)$ für alle $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Regularität liefert dann $\lambda_n(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. ∎

**4.15. Satz.** Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $A \in \mathcal{L}^n$. Dann gilt:

$$\lambda_n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_n(A).$$

**Beweis.** *Schritt 1:* Sei erst $\det T \neq 0$. D.h. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is invertierbar und sogar ein Homöomorphismus. So gilt $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow T(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Setze $\mu(B) := \lambda_n(T(B))$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mu$ ein Borel-Maß. Ferner ist $\mu$ regulär:

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \lambda_n(T(B)) = \inf\{\mu(G) : T(B) \subseteq G,\ G \text{ offen}\} = \inf\{\mu(G) : B \subseteq T^{-1}(G),\ G \text{ offen}\} \\
&= \inf\{\mu(G') : B \subseteq G',\ G' \text{ offen}\}; \\
\mu(B) &= \lambda_n(T(K)) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq T(B),\ K \text{ kompakt}\} = \sup\{\mu(K) : T^{-1}(K) \subseteq B,\ K \text{ kompakt}\} \\
&= \inf\{\mu(K') : K' \subseteq B,\ K' \text{ kompakt}\}.
\end{aligned}$$

$\mu$ ist auch translationsinvariant (bemerke, dass $B$ Borel $\Longrightarrow B+a$ Borel): $\mu(B+a) = \lambda_n(T(B+a)) = \lambda_n(T(B) + Ta) = \lambda_n(T(B)) = \mu(B)$. So gilt nach Theorem 4.14 $\mu(B) = \mu([0,\mathbf{1})) \cdot \lambda_n(B)$. für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ferner für $A \in \mathcal{L}^n$ gilt $A = B \cup N$ mit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $N$ Lebesgue-Nullmenge. So folgt $\lambda_n(T(A)) = \lambda_n(T(B \cup N)) = \lambda_n(T(B) \cup T(N)) = \lambda_n(T(B)) = \mu([0,\mathbf{1}))\lambda_n(B) = \mu([0,\mathbf{1}))\lambda_n(A)$, wo wir haben auch benutzt, dass $T(N)$ wegen 4.11 eine Lebesgue-Nullmenge ist.

*Schritt 2:* Nun bestimmen wir $\mu([0,\mathbf{1}))$, zunächst in speziellen Fällen. Betrachte Matrizen der folgenden Form:

$$\alpha)\ \text{Permutationsmatrix}, \quad \beta) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{oder } \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Sei erst $T$ der Form $\alpha$). Dann ist $T([0,\mathbf{1})) = [0,\mathbf{1})$, und somit $\mu([0,1)) = \lambda_n([0,1)) = 1 = \det(T)$.

Sei jetzt $T$ der Form $\beta$) mit $a \neq 0$. Dann ist

$$T([0,\mathbf{1})) = \begin{cases} [0,a) \times [0,1) \times \cdots \times [0,1) & \text{für } a > 0 \\ (a,0] \times [0,1) \times \cdots \times [0,1) & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

So gilt $\mu([0,\mathbf{1})) = \lambda_n(T([0,\mathbf{1}))) = a = \det(T)$.

Sei $T$ der Form $\gamma$). Betrachte $e_j$ Standardbasisvektoren und $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \in [0,\mathbf{1})$. Dann ist $Tx = (x_1+x_2)e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n$. Also gilt

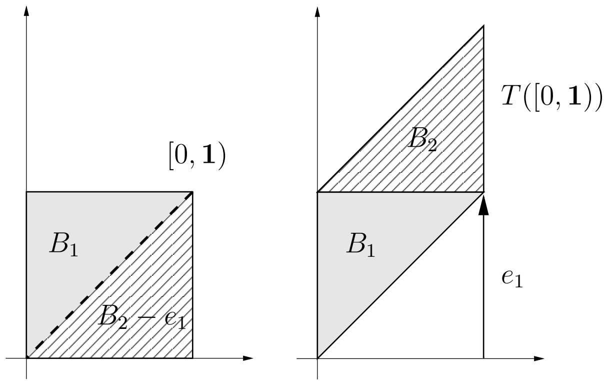
$$T([0,\mathbf{1})) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le 1, j = 1,\dots,n,\ x_2 \le x_1 < x_2 + 1\}.$$

Wir setzen

$$B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le 1, j = 1,\dots,n,\ x_2 \le x_1 < 1\} \quad \text{und}$$
$$B_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_j \le 1, j = 1,\dots,n,\ 1 \le x_1 < 1 + x_2\}.$$

So gilt $T([0,\mathbf{1})) = B_1 \cup B_2$. Ferner ist $B_1 \cup (B_2 - e_1) = [0,\mathbf{1})$. Wegen Translationsinvarianz und $B_1 \cap B_2 = \emptyset = B_1 \cap (B_2 - e_1)$ gilt $\mu([0,\mathbf{1})) = \lambda_n(T([0,\mathbf{1})) = \lambda_n(B_1 \cup B_2) = \lambda_n(B_1) + \lambda_n(B_2) = \lambda_n(B_1) + \lambda_n(B_2 - e_1) = \lambda_n(B_1 \cup (B_2 - e_1)) = \lambda_n([0,\mathbf{1})) = 1 = \det(T)$.

So haben wir gesehen, dass für solche Matrizen $T$ gilt $\mu([0,1)) = \det(T)$ und somit $\mu(B) = \det(T)\lambda_n(A)$ für alle $A \in \mathcal{L}^n$.




*Schritt 3:* Zunächst Erinnerung an Linear Algebra: jede Matrix läßt sich als Produkt $T = T_1T_2\cdots T_k$ von Matrizen $T_j$ der Form schreiben $\alpha$), $\beta$) oder $\gamma$). So gilt

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \lambda_n(T(A)) = \lambda_n(T_1T_2\cdots T_k(A)) = \det(T_1)\lambda_n(T_2\cdots T_k(A)) \\ &= \det(T_1)\det(T_2)\lambda_n(T_3\cdots T_k(A)) = \cdots = \det(T_1)\det(T_2)\cdots\det(T_k)\lambda_n(A) = \det(T)\cdot\lambda_n(A).\end{aligned}$$

*Schritt 4:* In dem Fall $\det T = 0$, ist $T(A)$ in einem Unterraum $V \subsetneq \mathbb{R}^n$ enthalten. Damit ist $\lambda_n(T(A)) \le \lambda_n(V)$. Wir zeigen nun, dass $\lambda_n(V) = 0$ gilt für alle Unterräume $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $d := \dim V \le n$, und daher folgt die Behauptung auch für $\det T = 0$. Man betrachtet eine orthonormale (unitäre) Transformation $O$ mit $O(V) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$. So ist $\lambda_n(O(V)) = \det O \cdot \lambda_n(V) = \lambda_n(V)$. Es ist einfach $\lambda_n(O(V)) = \lambda_n(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = 0$ zu zeigen. ∎

# § 5 Meßbare Funktionen

**Vorbemerkung, siehe 1.6:** $f : X \to Y$ wobei $X, Y$ beliebige nichtleere Mengen
Ist $\mathcal{N}$ eine $\sigma$-Algebra auf $Y$, so ist $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{N}\}$ $\sigma$-Algebra auf $X$.

**5.1. Definition.**

a) Sei $X$ eine nichtleere Menge, $\mathcal{M}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$. Dann heißt $(X, \mathcal{M})$ *messbarer Raum*.

b) Seien $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-*messbar* (oder kurz *messbar*), falls $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ für alle $E \in \mathcal{N}$.

**5.2. Lemma.** Sei $\mathcal{N} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ erzeugte $\sigma$-Algebra. Dann gilt:

$$f : X \to Y \quad \text{ist } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \text{ für alle } E \in \mathcal{E}.$$

**Beweis.** Setze $\mathcal{A} := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$ und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. So gilt nach 1.4 $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$. ∎

**5.3. Korollar.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig (allgemeiner: $f : X \to Y$, wobei $X, Y$ topologische Räume).
$\Longrightarrow f$ ist $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$-messbar.

**Beweis.** Die Borel-$\sigma$-Algebra wird von den offenen Mengen $\mathcal{O}$ erzeugt: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O})$. Ferner ist das Urbild $f^{-1}(G)$ einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, denn $f$ ist stetig. So endet Lemma 5.2 den Beweis. ∎

**Weitere Notationen:**

a) Sei $f : X \to \mathbb{K}$, wobei $(X, \mathcal{M})$ messbarer Raum und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann heißt $f$ $\mathcal{M}$-*messbar* oder einfach *messbar*, falls $f$ $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bzw. $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-messbar ist.

b) Insbesondere gilt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *Lebesgue (Borel)-messbar*, falls
$f$ $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-messbar $((\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-messbar) ist.
**Vorsicht:** $f, g$ Lebesgue-messbar $\not\Longrightarrow$ $f \circ g$ Lebesgue-messbar.

**5.4. Bemerkung.**

a) Sei $(X, \mathcal{M})$ messbarer Raum, $Y = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^m$ und $f : X \to Y$ $\mathcal{M}$-messbar, $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ $\mathcal{M}$-messbar.

b) Sei $(X, \mathcal{M})$ messbarer Raum und $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$f \text{ messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad f_j \text{ messbar für } j = 1, \ldots, n.$$

**5.5. Folgerungen.** Sei $(X, \mathcal{M})$ messbarer Raum. Dann gilt:

i) $f : X \to \mathbb{K}^n$ messbar $\Longrightarrow |f| : X \to \mathbb{R}$ messbar.

ii) $f : X \to \mathbb{C}$ messbar $\Longrightarrow \Re f, \Im f : X \to \mathbb{R}$ messbar.

iii) $f, g : X \to \mathbb{K}^n$ messbar $\Longrightarrow f + g$, $\alpha f : X \to \mathbb{K}^n$ messbar, $\alpha \in \mathbb{K}$. (Vektorraum-Struktur)

iv) $f, g : X \to \mathbb{K}$ messbar $\Longrightarrow f \cdot g : X \to \mathbb{K}$ messbar. (Algebra-Struktur)

**Beweis.** Man verwendet Bemerkung 5.4. Zum Beispiel: iii) Betrachte die stetige Funktion $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $P(x, y) = x + y$ und die, nach Bemerkung 5.4 b) messbare Funktion $F : X \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $F(x) = (f(x), g(x))$. So ist $f + g = P \circ F$, und die Messbarkeit folgt aus Bemerkung 5.4 a). ∎

**5.6. Satz.** Sei $(X, \mathcal{M})$ messbarer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$. Äquivalent sind:

i) $f$ ist $\mathcal{M}$-messbar.

ii) $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{M}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

iii) $f^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{M}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

iv) $f^{-1}((-\infty,a]) \in \mathcal{M}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

v) $f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{M}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

**Beweis.** Folgt aus 1.5 und 5.2. ■

**5.7. Bemerkung.** Wir betrachten $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ und definieren

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} : \ A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

(Dies stimmt mit üblichen Definition von Borel-Mengen überein, denn $\overline{R}$ ist ein metrischer Raum mit $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.)

a) Dann wird $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erzeugt durch Intervalle $(a,+\infty]$ oder $[-\infty,a)$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt $\mathcal{M}$-messbar falls $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar.

c) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{M}$-messbar $\iff f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

d) 5.5 bleibt richtig für $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Funktionen, wenn die Operationen $+$ bzw. $\cdot$ sinnvoll sind. Wir verabreden weiterhin die Konvention "$0 \cdot \infty = 0$".

e) Für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$. Es gelten $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $f = \operatorname{sgn} f \cdot |f|$.

**5.8. Satz.** Seien $f_n : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind

$$\text{a) } \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \text{b) } \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \text{c) } \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \text{d) } \liminf_{n\to\infty} f_n$$

auch messbar.

**Beweis.** a) Setze $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Nach 5.6 ist $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Es gilt

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \{x : \text{existiert } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : f_n(x) > \alpha\}.$$

Da nach Voraussetzung ist $\{x : f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ für $n \in \mathbb{N}$, die Behauptung folgt.

c) Ähnlich zu a): setze $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$. Nach 5.6 ist $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Es gilt

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \{x : \text{existieren unendlich vielen } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f_n(x) > \alpha\} = \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} \underbrace{\{x : f_k(x) > \alpha\}}_{\in\mathcal{M}}}_{\in\mathcal{M}}}_{\in\mathcal{M}}.$$

Die Andere Aussagen lassen sich analog beweisen. ■

**5.9. Satz.** Seien $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$, so ist $f$ messbar.

**Beweis.** Folgt aus 5.8 ■

Wir betrachten nun die grundlegenden Funktionen für das Integral.

**5.10. Definitionen + Bemerkung.** Sei $(X, \mathcal{M})$ messbarer Raum und $A \subseteq X$.

a) Die *charakteristische Funktion* $\chi_A$ *von* $A$ (Indikationsfunktion von $A, \mathbb{1}_A$, etc.) ist definiert durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) $\varphi : X \to \mathbb{K}$ heißt *einfach*, falls $\varphi$ ist messbar und $\varphi(X)$ ist endliche Teilmenge von $\mathbb{K}$.
$\iff \varphi$ ist endliche Linearkombination von $\chi_A$ mit $A \in \mathcal{M}$ und Koeffizienten aus $\mathbb{K}$.

c) $\varphi$ ist einfach $\Longrightarrow \varphi = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j \, \chi_{A_j}$ mit $\varphi(X) = \{a_1, \cdots a_N\}$ und $A_j := \varphi^{-1}(\{a_j\})$.
*[Standard-Darstellung]*

**5.11. Theorem [Approximationssatz].** Sei $(X, \mathcal{M})$ messbarer Raum.

a) $f : X \to [0, +\infty]$ ist messbar $\iff$ existiert eine Folge $(\varphi_n)$ von einfachen Funktionen mit $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \le f$ und $\varphi_n \nearrow f$ punktweise.

b) $f : X \to \mathbb{K}$ ist messbar $\iff$ Folge $(\varphi_n)$ von einfachen Funktionen mit $0 \le |\varphi_1| \le |\varphi_2| \le \cdots \le |f|$ und $\varphi_n \to f$ punktweise.

**Beweis.** a) "$\Leftarrow$": Folgt aus 5.9.

"$\Rightarrow$": Für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 1, 2, \ldots, n2^n$ setze

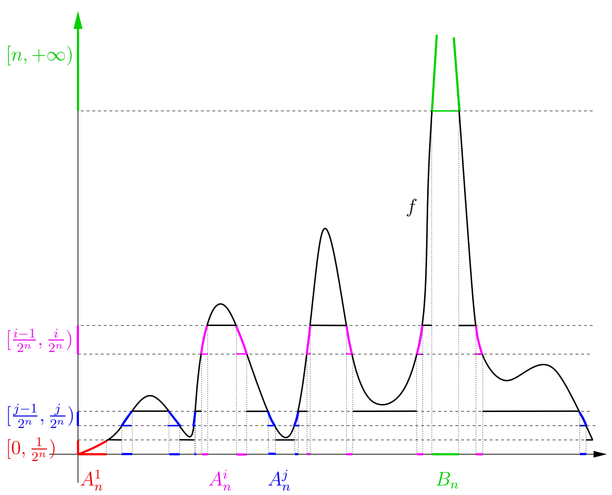
$$A_n^j := f^{-1}([\tfrac{j-1}{2^n}, \tfrac{j}{2^n})), \qquad \text{und} \quad B_n := f^{-1}([n, +\infty]).$$

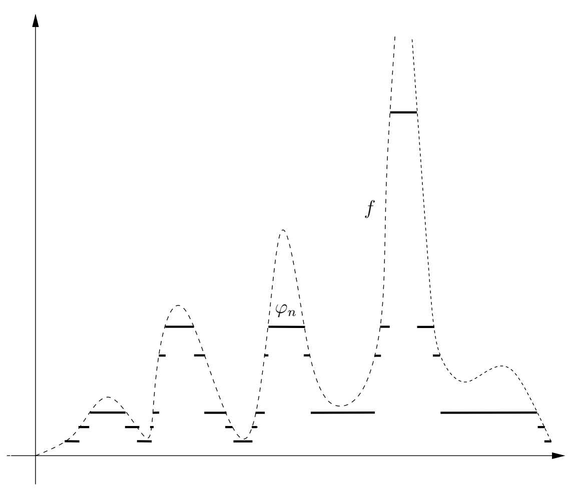
Dann gilt $A_n^j, B_n \in \mathcal{M}$ für $n, j \in \mathbb{N}$. Setze ferner $\varphi_0 = 0$ und

$$\varphi_n := \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{A_n^j} + n \chi_{B_n}, \quad n \ge 1.$$

Natürlich ist $\varphi_n$ einfach und gilt $0 \le \varphi_0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \le f$. Sei $x \in f^{-1}([0, +\infty))$, dann existiert $n_x \in \mathbb{N}$ mit $0 \le f(x) - \varphi_n(x) \le 1/2^n$ für $n \ge n_x$. Ist $f(x) = +\infty$, dann für $\varphi_n(x) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammenfassend: $\varphi_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$.

b) Sei $f = g + \imath h$. Wir wenden Teil a) auf $g^+$, $g^-$, $h^+$ und $h^-$ an. So erhält man $\xi_n \nearrow g^+$, $\psi_n \nearrow g^-$, $\eta_n \nearrow h^+$, $\zeta_n \nearrow h^-$. Setze $\varphi_n := \xi_n - \psi_n + \imath(\eta_n - \zeta_n)$. So gilt $\varphi_n \to f$ punktweise für $n \to \infty$. Ferner gilt für $x \in X$ $|\varphi_n(x)| \le |\varphi_{n+1}(x)| \le |f(x)|$. ∎



# § 6 Integration positiver Funktionen

In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Ferner sei

$$\mathcal{M}^+ := \{f : X \to [0, +\infty], f \text{ messbar}\}.$$

Erinnerung: $\varphi \in \mathcal{M}$ einfach $\Longrightarrow \varphi$ besitzt Standard-Darstellung

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j},$$

wobei $\mathrm{rg}(f) := f(X) = \{a_1, \cdots a_N\}$ und $A_j = f^{-1}(\{a_j\})$.

**6.1. Definition.**

a) Sei $\varphi \in \mathcal{M}^+$ einfach mit Standard-Darstellung. Wir setzen

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(A_j)$$

und nennen diesen Ausdruck das *Lebesgue-Integral von $\varphi$ bzgl. $\mu$.*

b) Falls $A \in \mathcal{M}$, so nennen wir

$$\int_A \varphi \, \mathrm{d}\mu := \int \varphi \chi_A \, \mathrm{d}\mu$$

das *Lebesgue-Integral von $\varphi$ über $A$ bzgl. $\mu$.*

**Bemerkung:** Sei $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{M} b_k \chi_{B_k}$ nicht unbedingt in standard Darstellung, $b_k \geq 0$, dann gilt

$$\int_B \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{M} b_k \mu(B \cap B_k).$$

**6.2. Lemma.** Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+$ einfach. Dann gilt:

a) Für $\alpha \geq 0$ ist $\int \alpha\varphi \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int \varphi \, \mathrm{d}\mu$.

b) $\int (\varphi + \psi) \, \mathrm{d}\mu = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu + \int \psi \, \mathrm{d}\mu$.

c) $\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \leq \int \psi \, \mathrm{d}\mu$.

d) Die Abbildung $A \mapsto \int\limits_A \mathrm{d}\mu$ ist Maß auf $\mathcal{M}$.

**Beweis.** a) Trivial aus Definition.

b) Sei $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$ und $\psi = \sum\limits_{k=1}^{M} b_k \chi_{B_k}$, mit $A_j$ bzw. $B_k$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu + \int_X \psi \, \mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(A_j) + \sum_{k=1}^{M} b_k \mu(B_k) = \sum_{j=1}^{N} a_j \sum_{k=1}^{M} \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{k=1}^{M} b_k \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (a_j + b_k) \mu(A_j \cap B_k) = \int_X \varphi + \psi \, \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

wobei wir haben auch benutzt, dass $A_j = \bigcup_{k=1}^M (A_j \cap B_k)$ und $B_k = \bigcup_{j=1}^N (A_j \cap B_k)$.

c) Analog zu Teil b): Sei $\varphi = \sum\limits_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ und $\psi = \sum\limits_{k=1}^M b_k \chi_{B_k}$, mit $A_j$ bzw. $B_k$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M a_j \mu(A_j \cap B_k) \leq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M b_k \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^M b_k \mu(B_k) = \int\limits_X \psi \,\mathrm{d}\mu,$$

wo $a_j = \varphi(x) \leq \psi(x) = b_k$ für $x \in A_j \cap B_k$ gilt nach Voraussetzung.

d) Sei $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, $B_n \in \mathcal{M}$ und $B_n \cap B_k = \emptyset$, $n \neq k$. Zu zeigen ist $\int_B \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{B_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu$. Wir schreiben einfach die Definition hin:

$$\sum_{n=1}^\infty \int\limits_{B_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^N a_j \mu(B_n \cap A_j) = \sum_{j=1}^N a_j \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n \cap A_j) = \sum_{j=1}^N a_j \mu(B \cap A_j) = \int\limits_B \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

■

Wir dehnen nun den Integralbegriff aus auf $\mathcal{M}^+$.

**6.3. Definition.** Sei $f \in \mathcal{M}^+$, $B \in \mathcal{M}$. Dann heißt

$$\int f_B \,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{ \int\limits_B \varphi \,\mathrm{d}\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ einfach} \Big\}$$

das *Lebesgue-Integral von $f$ über $B$ bzgl. $\mu$.*

**Bemerkung:**

a) Sei $f \in \mathcal{M}^+$ einfach $\Longrightarrow$ die Definitionen 6.1 und 6.3 stimmen überein.

b) Definition impliziert, dass für $f, g \in \mathcal{M}^+$ gilt

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu \text{ und } \int\limits_X \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad \alpha \geq 0.$$

Erstes fundamentales Resultat ist folgender Konvergenzsatz.

**6.4. Theorem [Beppo-Levi, monotone Konvergenz].** Es seien $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$ messbar

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

$\Longrightarrow f$ ist messbar und $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

**Beweis.** Nach Voraussetzung wissen wir $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu$, also existiert $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$. Wegen 5.9 ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ messbar. Ferner gilt $f_n \leq f$ und so $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Sei jetzt $0 \leq \varphi \leq f$ einfache Funktion und $0 < \alpha < 1$. Definiere die Mengen $A_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$. Es gilt $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Denn ist $f(x) = 0$, so folgt $\varphi(x)$ auch und damit $x \in A_n$. Falls $f(x) > 0$, so gilt $\alpha\varphi(x) < f(x)$ und deswegen $f_n(x) > \alpha\varphi(x)$ für $n$ genug groß, d.h. $x \in A_n$. Offensichtlich ist $A_n \subseteq A_{n+1}$. Theorem 2.4 und Lemma 6.2 d) geben dann

$$\alpha \int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} \alpha\varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Dies gilt für alle $\alpha \in (0,1)$ und $0 \leq \varphi \leq f$ einfach, also nach Definition $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$. ■

**Bemerkung:** $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ ist definiert als sup über "riesige" Menge $\Longrightarrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ ist schwierig direkt zu berechnen.
Theorem 6.4 besagt $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$, wobei $f_n$ einfach mit $f_n \nearrow f$. Der Approximationssatz besagt, dass solche Folgen existieren.

Eine Anwendung von 6.4 ist:

**6.5. Satz.** Sei $(f_n)$ Folge in $\mathcal{M}^+$ und $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
$\Longrightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu = \sum\limits_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu$.

**Beweis.** Zunächst zeigen wir, dass das Integral endlich additiv ist. Sei $\varphi_j^n \le f_j$, $j = 1\dots, N$ mit $\varphi_j^n \le \varphi_j^{n+1} \to f_j$ punktweise (siehe Theorem 5.11). Lemma 6.2 b) gibt

$$\int_X \varphi_1^n \, \mathrm{d}\mu + \int_X \varphi_2^n \, \mathrm{d}\mu + \cdots + \int_X \varphi_N^n \, \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi_1^n + \varphi_2^n + \cdots + \varphi_N^n \, \mathrm{d}\mu.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert hier die linke Seite gegen $\int_X f_1 + \cdots + f_N \, \mathrm{d}\mu$ und die rechte Seite gegen $\int_X f_1 + \cdots + f_n \, \mathrm{d}\mu$ (verwende Theorem 6.4). Nun definiere $g_n := \sum_{j=1}^n f_j$, dann ist $g_n \le g_{n+1}$ und Theorem 6.4 liefert

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_X f_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

■

**6.6. Lemma [Fatou].** Sei $(f_n)$ Folge in $\mathcal{M}^+$. Dann ist

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

**Beweis.** Sei $g_n := \inf_{j\ge n} f_j$, und $g := \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$. Dann $g_n \nearrow g$ und für $j \ge n$ gilt $g_n \le f_j$, und so $\int g_n \, \mathrm{d}\mu \le \int f_j \, \mathrm{d}\mu$. Daher $\int g_n \, \mathrm{d}\mu \le \inf_{j\ge n} \int f_j \, \mathrm{d}\mu$, und aus Theorem 6.4 folgt

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf_{j\ge n} \int_X f_j \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

■

**6.7. Notation.** Es seien $f, f_n, g : X \to \mathbb{K}$ messbar.

a) $f = g$ *fast überall*, falls eine Menge $N \in \mathcal{M}$ existiert mit $\mu(N) = 0$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in N^c$.

b) $f_n \to f$ *fast überall*, falls eine Menge $N \in \mathcal{M}$ existiert mit $\mu(N) = 0$ und $f_n(x) \to g(x)$ für alle $x \in N^c$.

**6.8. Satz.** Für $f \in \mathcal{M}^+$ gilt $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ fast überall.

**Beweis.** Sei zunächts $f$ einfach, $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$. Dann $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow a_j = 0$ oder $\mu(A_j) = 0$. Also folgt die Behauptung in diesem speziellen Fall.
$\Leftarrow$: Sei $f = 0$ fast überall. Dann für die einfache Funktionen $0 \le \varphi \le f$ gilt $\varphi = 0$ fast überall, also $\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ und so $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

$\Rightarrow$: Sei $A_n := \{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$. Dann gilt $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ist $\mu(A_n) > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\int_X f \, \mathrm{d}\mu > \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$. D.h. unter die Bedingung $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ gilt $\mu(A_n) = 0$ und somit $f = 0$ fast überall. ■

**6.9. Korollar.** Sei $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+, f \in \mathcal{M}^+$ und $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \cdots \leq f_n \leq \cdots$ fast überall und $f_n \to f$ fast überall.
$\Longrightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu$.

**Beweis.** ■

**6.10. Korollar.** Sei $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+, f \in \mathcal{M}^+, f_n \to f$ fast überall.
$\Longrightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$.

**Beweis.** ■

**6.11. Satz.** Sei $f \in \mathcal{M}^+$ mit $\int f \, \mathrm{d}\mu < +\infty \to \{x \in X : f(x) = +\infty\}$ ist $\mu$-Nullmenge.

**Beweis.** ■

# § 7 Integrierbare Funktionen

Es sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Wir dehnen den Integralbegriff aus auf messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$.

**7.1. Definition.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar mit $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ und $\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Wir definieren

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu := \int\limits_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

und nennen obigen Ausdruck *Lebesgue Integral von $f$*. In diesem Fall heißt $f$ *integrierbar*.

**7.2. Satz.** $L^1(\mu, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R}, f \text{ integrierbar}\}$ ist Vektorraum und es gilt:

$$\int\limits_X f + \alpha g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

**Beweis.** Es gilt $|f+\alpha g| \leq |f|+|\alpha|\cdot|g|$, also ist $f+\beta g$ integrierbar, und $\alpha \int g = \int \alpha g$, damit ist $L^1(\mu, \mathbb{R})$ Vektorraum wegen Lemma 6.2. Ferner sei $h := f + g$ mit $f, g$ integrierbar. Dann $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, also $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Satz 6.5 gibt $\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$, also $\int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$. ∎

**7.3. Definition.**

a) Sei $f : X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $f$ *integrierbar*, falls

$$\int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

b) Allgemeiner, für $A \in \mathcal{M}$ heißt $f$ *integrierbar über $A$*, falls $\int\limits_A |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

c) Falls $f$ integrierbar über $A$ ist, so heißt $\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_A \Re f \,\mathrm{d}\mu + \imath \int_A \Im f \,\mathrm{d}\mu$ das *Lebesgue Integral von $f$ bzgl. $\mu$ über $A$.*

**Bemerkung:**

a) $|f| \leq |\Re f| + |\Im f| \leq 2|f|$, also $f$ integrierbar $\iff$ $\Re f$ und $\Im f$ integrierbar.

b) Wie in 7.2 zeigt man, dass $L^1(\mu, \mathbb{C}) := \{f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ integrierbar}\}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

**7.4. Satz.** Für $f \in L^1$ gilt: $|\int_X f \,\mathrm{d}\mu| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

**Beweis.** Ist $\int f = 0$, so folgt die Behauptung. Sei $f : X \to \mathbb{R}$. Dann $|\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$.

Sei $f : X \to \mathbb{C}$ und $\int f \neq 0$. Setze $\alpha = |\int f| / \int f$. Dann $|\int f| = \alpha \int f = \int \alpha f = \Re \int \alpha f = \int \Re \alpha f \leq \int |\Re \alpha f| \leq \int |\alpha f| = \int |f|$. ∎

**7.5. Korollar.** Seien $f, g \in L^1$. Dann gilt:

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \mathcal{M} \quad \iff \quad \int\limits_X |f - g| \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \iff \quad f = g \text{ fast überall}$$

**Beweis.** Nur die erste Äquivalenz ist zu zeigen.
$\Leftarrow$: Gilt $\int_X |f-g|\,\mathrm{d}\mu = 0$, so ist $f = g$ fast überall, und so $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_A g\,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{M}$.

$\Rightarrow$: Wir zeigen z.B., dass $\Re f = \Re g$ fast überall ($\Im f = \Im g$ geht genau so). Nach Voraussetzung $\int_A \Re f\,\mathrm{d}\mu = \Re \int_A \Re g\,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{M}$. Insbesondere gilt dies für $A_+ := \{x \in X : \Re f(x) > \Re g(x)\}$ und $A_- := \{x \in X : \Re f(x) < \Re g(x)\}$. So erhält man $\mu(A_-) = 0$ und $\mu(A_+) = 0$, und somit die Behauptung. ∎

**7.6. Theorem [Lebesgue, Dominierte Konvergenz].** Sei $(f_n) \subseteq L^1$ derart, dass

i) Es existiert messbare Funktion $f$ mit $f_n \to f$ fast überall

ii) Es existiert $g \in L^1, g \geq 0$ mit $|f_n| \leq g$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow f \in L^1$ und $\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$.

**Beweis.** Es gilt $f \in L^1$, denn $|f| \leq g$ fast überall. Es gilt $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$, also gilt $h_n := 2g - |f_n - f| \geq 0$. Wende nun Lemma von Fatou auf $h_n$ an:

$$\begin{aligned}\int\limits_X 2g\,\mathrm{d}\mu &= \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} h_n\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X 2g - |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X 2g + \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X -|f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_X 2g - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$, und so $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$. Also

$$\Big|\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\Big| \overset{7.2}{=} \Big|\int\limits_X f_n - f\,\mathrm{d}\mu\Big| \leq \int\limits_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

∎

**Bemerkung:** Existenz einer Majorante in Theorem 7.6 ist wesentlich. Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda_1$, $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$. Dann $f_n \to 0$ punktweise aber $\int_{[0,1]} f_n\,\mathrm{d}\lambda_1 = 1$.

Anwendung auf gliederweise Integration von Reihen.

**7.7. Satz.** Sei $(f_n) \subseteq L^1$ mit $\sum_{n=1} \int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
$\Longrightarrow \sum_{n=1}^\infty f_n$ konvergiert f.ü. gegen ein $f \in L^1(X,\mu)$ und

$$\int\limits_X \sum_{n=1}^\infty f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

**Beweis.** Setze $g := \sum_{n=1}^\infty |f_n|$. Satz 6.5 gibt $\int g = \sum \int |f_n| < +\infty$. Satz 6.11 liefert dann $\sum |f_n(x)| < +\infty$ fast überall, und konvergiert $\sum f_n(x)$ fast überall. Ferner gilt $\left|\sum_{j=1}^N f_j\right| \leq g$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Lebesgue-Satz 7.6 zeigt $\int \sum f_n = \sum \int f_n$. ∎

**7.8. Satz [Differenzierbarkeit von Parameterintegralen].** Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ Maßraum und $f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$. Es gelte

i) $f(\cdot, t) \in L^1(\mu, \mathbb{C})$ für alle $t \in [a,b]$.

ii) $\frac{\partial f}{\partial t}$ existiert auf $X \times (a,b)$ und es existiert $g \in L^1(\mu, \mathbb{R})$ mit

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big| \leq g(x) \quad \text{für alle } (x,t) \in X \times [a,b].$$

Dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(t) := \int_X f(x, t)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

differenzierbar auf $(a, b)$ und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_X f(x, t)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x, t)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

**Beweis.** Es gilt $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{t_n \to t_0} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$, also ist $x \to \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ für alle $t \in (a, b)$ messbar. Der Mittelwertsatz und ii) geben

$$\left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \right| \leq |f'(x, s)| \leq g(x).$$

So folgt nach dem Satz von Lebesgue 7.6

$$F'(t_0) = \lim_{t_n \to t_0} \int_X \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

(Dies gilt für alle $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \to t_0$, und so folgt die Behauptung.) ∎

**Diskussion [Zusammenhang mit Riemann-Integral]:** Sei $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ Partition $P$ von $[a, b]$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Setze

$$O_P f := \sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1}), \quad U_P f := \sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1}),$$

$$\text{wobei} \quad M_j := \sup_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x), \text{ and } m_j := \inf_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$$

Falls $\inf_P O_P f = \sup_P U_P f$, so heißt $f$ *Riemann-integrierbar* und $\int_a^b f(s)\, \mathrm{d}x := \inf_P O_P f = \sup_P U_P f$ heißt *das Riemann-Integral von* $f$.

**7.9. Theorem.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

a) $f$ Riemann integrierbar $\Longrightarrow$ $f$ ist Lebesgue-messbar (daher auch Lebesgue-integrierbar) und

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f\, \mathrm{d}\lambda.$$

b) $f$ Riemann integrierbar $\Longleftrightarrow$ Menge der Unstetigkeitsstellen von $f$ ist Lebesgue-Nullmenge.

**Beweis.** a) Sei $f$ Riemann-integrierbar, setze $G_P := \sum_{j=1}^n M_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$, $g_P := \sum_{j=1}^n m_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$. Dann $O_P f = \int G_P\, \mathrm{d}\lambda$ und $U_P f = \int g_P\, \mathrm{d}\lambda$. Dies gilt für alle Partitionen $P$ von $[a, b]$. Nun wähle Partitionen $P_n \subseteq P_{n+1}$ mit $O_{P_n} f \to \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ und $U_{P_n} f \to \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. Setze $G := \lim_{n \to \infty} G_{P_n}$ und $g := \lim_{n \to \infty} g_{P_n}$. Dann sind $G, g$ messbar und gilt $g \leq f \leq G$. Daher

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} U_{P_n} f = \lim_{n \to \infty} \int g_{P_n}\, \mathrm{d}\lambda \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int \lim_{n \to \infty} g_{P_n}\, \mathrm{d} = \int g\, \mathrm{d}\lambda \text{ und}$$

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} O_{P_n} f = \lim_{n \to \infty} \int G_{P_n}\, \mathrm{d}\lambda \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int \lim_{n \to \infty} G_{P_n}\, \mathrm{d}\lambda = \int G\, \mathrm{d}\lambda,$$

d.h. $\int G\, \mathrm{d}\lambda = \int g\, \mathrm{d}\lambda$ (denn $G \geq g$), somit $G = g$ fast überall. Ferner $g \leq f \leq G$, so $g = f = G$ fast überall. Da $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda)$ ist vollständig, ist auch $f$ messbar und Integrale stimmen überein.

b) Ohne Beweis. ∎

**Beispiel:** $f[0,1] \to [0,1]$ und $Q := \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dann $\chi_Q$ ist nicht Riemann-integrierbar (da überall unstetig), aber $\chi_Q = 0$ fast überall, also ist auch Lebesgue-Integrierbar und $\int \chi_Q \, \mathrm{d}\lambda = 0$.

**Bemerkung: Vergleich Riemann Integral - Lebesgue-Integral.**
Riemann: Zerlege Definitionsbereich $[a,b]$ in Teilintervalle und approximiere $f$ von "unten nach oben" durch Funktion, welche konstant auf jeden Teilintervall ist.
Lebesgue: Wähle Folge von einfachen Funktionen $(\varphi_j)$ mit $\varphi_j \nearrow f$.
Wähle $\varphi_j$, insbesondere wie in Approximationssatz 5.11, d. h.
zerlege Wertebereich von $f$ in Teilintervalle $I_j$ und approximiere $f$ durch
Konstante auf $f^{-1}(I_j)$.
Vorteil der Lebesgue-Theorie:

- Konvergenzsätze
- wichtige Funktionsräume versehen mit "Integralnormen" sind vollständig bzgl. Lebesgue-Integral, aber nicht bzgl. Riemann-Integral. Beispiel: $L^2 \to$ Quantenmechanik.

# § 8 $L^p$ Räume

$L^p$-Räume verallgemeinern $L^1$ und spielen eine wichtige Rolle in der modernen Analysis.
In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

**8.1. Definition.**

a) Sei $1 \le p < \infty$. Setze $\|f\|_p := \Big(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$.

b) Sei $1 \le p < \infty$. Definiere

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu, \mathbb{K}) := \big\{f : X \to \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < +\infty\big\}.$$

**8.2. Bemerkung.**

a) Sei $f \in \mathcal{L}^p$, $\|f\|_p = 0 \iff f \in \mathcal{N}(\mu) := \{f : \; f \text{ messbar und } f = 0 \; \mu\text{-fast überall}\}$.
[“$\Rightarrow$”: $\|f\|_p = 0 \Rightarrow \int |f|^p = 0 \Rightarrow |f|^p = 0$ f.ü. $\Rightarrow f \in \mathcal{N}(\mu)$.
“$\Leftarrow$”: Klar]

b) $\mathcal{L}^p$ ist ein Vektorraum.
[$f, g \in \mathcal{L}^p \Rightarrow |f+g|^p \le (2\max\{|f|, |g|\})^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p)$.]

c) Notation $\|f\|_p$ deutet auf Norm hin.

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ fast überall, aber } f \equiv 0 \text{ nicht notwendigerweise.}$$

d) $\mathcal{N}(\mu)$ ist Untervektorraum vom Vektorraum aller messbaren Funktionen.

$$f \sim g \quad \overset{\text{Def.}}{\iff} \quad f - g \in \mathcal{N}(\mu) \quad (\iff f = g \quad \mu\text{-fast überall})$$

definiert eine Äquivalenzrelation.

**8.3. Definition.** Für $1 \le p < \infty$ definieren wir den Faktorraum

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu, \mathbb{K}) := \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}(\mu)$$

Abkürzende Schreibweise: $L^p(\mu)$, $L^p(X)$, $L^p$, usw.
STILLSCHWEIGENDE ÜBEREINKUNFT: Anstatt $[f] = f + \mathcal{N}(\mu)$ schreibt man kurz $f$, d. h. wir identifizieren Funktionen miteinander, welche $\mu$ fast überall übereinstimmen.

**8.4. Satz [Höldersche Ungleichung].** Es sei $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ (*konjugierte Exponente*). Dann für alle $f \in L^p(X, \mu)$ und $g \in L^q(X, \mu)$, gehört $f \cdot g$ zu $L^1(X, \mu)$ und

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Ferner gilt “=” genau dann, wenn $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ fast überall für $\alpha, \beta \neq 0$.

Zum Beweis zunächst ein Lemma:

**Lemma [Youngsche Ungleichung]:** Sei $a, b \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$ab \le \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q}, \quad \text{mit } \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

“=” gilt genau dann, wenn $a = b$.

**Beweis.** ■

**Bewies der Hölder-Ungleichung:** Natürlich ist $fg$ messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$ (falls wir mit 0 dividieren sollten, folgt $g = 0$ oder $f = 0$ fast überall, und die behauptete Ungleichung ist trivial). Anwenden der Young-Ungleichung in jedem Punk $x \in X$ gibt nach Integration

$$\int\limits_X \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |F(x)G(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int\limits_X \frac{|F(x)|^p}{p}\,\mathrm{d}\mu(x) + \int\limits_X \frac{|G(x)|^q}{q}\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. ■

**8.5. Satz [Minkowskische Ungleichung].** Sei $1 \leq p < \infty$ und $f, g \in L^p(X,\mu)$. Dann

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Beweis.** Verwende die Höldersche Ungleichung:

$$\|f+g\|_p^p \leq \int\limits_X |f| \cdot |f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X |g| \cdot |f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu$$
$$\|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Die Behauptung folgt nach Dividieren mit dem rechten Term und $p - p/q = 1$. ■

**8.6. Korollar.** Die Abbildung $\|\cdot\|_p \ : L^p(X,\mu) \to \mathbb{R}_+$ ist eine Norm und $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ist ein normierter Vektorraum.

**Beweis.** i) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ fast überall

ii) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$, $\alpha \in \mathbb{K}$

iii) Dreiecksungleichung: $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski-Ungleichung).

■

Es gilt sogar mehr:
Erinnerung: Ein vollständiger normierter Vektorraum (d.h., in dem jede Cauchy Folge konvergiert) heißt *Banachraum*.

Zunächst ein Hilffsatz:

**8.7. Satz.** Sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Dann ist $E$ vollständig $\Longleftrightarrow$ jede absolut konvergente Reihe konvergiert, d.h. für alle $(x_n) \subseteq E$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$ existiert ein $x \in E$ mit $\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^m x_n - x\right\| = 0$.

**Beweis.** "$\Rightarrow$": Da $\left(\sum_{n=1}^m x_n\right)_m$ eine Cauchyfolge ist, folgt die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Sei $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge. Zu $\varepsilon_k := 2^{-k}$ wähle $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ falls $n, m \geq N_k$. Dann existiert es eine Teilfolge $(x_{n_k})$ mit $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Dann $\sum_{k=1}^\infty \|y_k\| < +\infty$. Nach Voraussetzung existiert es $y \in E$ mit

$$\left\|y - \sum_{k=1}^m y_k\right\| = \|y - (x_{n_{m+1}} - x_{n_1})\| \to 0 \quad \text{als } m \to \infty.$$

Eine Teilfolge von $(x_n)$ konvergiert und $(x_n)$ ist Cauchy, also konvergiert auch $(x_n)$. ■

**8.8. Satz [Riesz–Fischer].** Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(X,\mu)$ vollständig.

**Beweis.** Sei $f_n \in L^p(X,\mu)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = K < +\infty$. Nach Satz 8.7 es ist zu zeigen dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_j$ konvergiert in $L^p$. Setze $G_n := \sum_{j=1}^{n} |f_j|$ und $G := \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$. Dann $\|G_n\|_p \le \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Satz von monotonen Konvergenz liefert

$$\int_X G^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X G_n^p \, \mathrm{d}\mu \le K^p < +\infty.$$

Dass heißt $G \in L^p(X,\mu)$ und $G(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| < +\infty$ $\mu$-fast überall, insbesondere konvergiert $F(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ für fast alle $x \in X$. Dann $|F| \le G$, daher $F \in L^p(X,\mu)$. Ferner

$$\Big|F - \sum_{j=1}^{n} f_j\Big|^p \le (2G)^p \in L^1(X,\mu),$$

nach Satz von Lebesgue

$$\Big\|F - \sum_{j=1}^{n} f_j\Big\|_p^p = \int_X \Big|F - \sum_{j=1}^{n} f_j\Big|^p \mathrm{d}\mu \to 0$$

■

**8.9. Satz.** Sei $f_n, f \in L^p(X,\mu)$ mit $f_n \to f$ in $L^p$ (d.h. $\|f_n - f\|_p \to 0$). Dann existiert dann eine Teilfolge $f_{n_k}$, so dass $f_{n_k}(x) \to f(x)$ $\mu$-fast überall.

**Beweis.** Folgt durch die Beweise von 8.7 und 8.8. ■

**Erinnerung an Lineare Algebra**

Sei $E$ komplexer Vektorraum, versehen mit Skalarprodukt.
Setze $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ für $x \in E$. Dann ist $\|x\|$ Norm auf $E$. Ist $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, so heißt $E$ *Hilbertraum*.

**8.10. Satz.** $L^2(X,\mu)$ ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts

$$(f,g) := \int_X f\bar{g} \, \mathrm{d}\mu.$$

**Beweis.** ■

### 8.11. Der Fall $p = \infty$

Sei $f : X \to \mathbb{K}$ messbar. Dann heißt $f$ *wesentlich beschränkt*, falls es ein $\alpha > 0$ existiert mit $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. Ferner heißt

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \ge 0 : \ \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

das *wesentliche Supremum* von $f$.

**8.12. Definition.** Den $L^\infty$-Raum ist definiert durch:

$$L^\infty(X,\mu) := \mathcal{L}^\infty(X,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}(\mu).$$

**8.13. Theorem [Eigenschaften von $L^\infty$].**

a) $|f| \le \|f\|_\infty$ $\mu$-fast überall.

b) Für $f \in L^1$ und $g \in L^\infty$ gilt $\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

c) $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm.

d) $\|f_n - f\| \to 0 \Longrightarrow$ es existiert ein $A \in \mathcal{M}$ mit $\mu(A^c) = 0$ und $f_n \to f$ gleichmässig auf $A$.

e) $(L^\infty(X,\mu), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

**Beweis.** ■

**8.14. Satz [$L^p$ Interpolation Ungleichung].** Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(X,\mu) \cap L^{p_1}(X,\mu)$, dann $f \in L^{p_\theta}(X,\mu)$ und gilt

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

**Beweis.** Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner gilt

$$g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(X,\mu) \text{ und } h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(X,\mu) \text{ und } \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \le \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. ■

**8.15. Satz [Allgemeine Hölder-Ungleichung].** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \dots, m$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$ ("$1/\infty = 0$"). Dann gilt

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_{L^p} \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

**Beweis.** Mit Induktion. ■

**8.16. Satz.** Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \le r \le p \le \infty$. Dann gilt $L^p(X,\mu) \subseteq L^r(X,\mu)$. Ferner gilt $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$ für $f \in L^\infty(X,\mu)$.

**Beweis.** ■

**8.17. Satz.** Es gilt $L^p(X,\mu) \subseteq L^1 + L^\infty(X,\mu)$, d.h. jedes $f \in L^p$ läßt sich als $f = g + h$ zerlegen, mit $g \in L^1$ und $h \in L^\infty$.

**Beweis.** Der Fall $p = \infty$ ist trivial, also sei $p < \infty$. Sei $f \in L^p(X,\mu)$. Setze $A := \{x \in X : |f| \ge 1\}$ und $h := \chi_A f$, $g := \chi_{X\setminus A} f$. Dann $g \in L^\infty(X,\mu)$ und $h \in L^1(X,\mu)$, denn

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu \le \int_A |f|^p\,\mathrm{d}\mu \le \int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu.$$

■

# § 9 Der Satz von Fubini und Anwendungen

**Problem:** Vertauschung der Integralreihenfolge bei Doppelintegralen.

### 9.1. Beispiele und Motivation

Sei $I = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2, f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

In Allgemein *NEIN*!

**Beispiel:** $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ , $x, y \in I$

$$\text{Dann: } \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{y^2+1} \Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}$$

Beobachtung: Für $0 < y < 1$ ist $\int\limits_0^x f(x,y)dy = \frac{1}{2x} \Rightarrow \int\limits_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}y \geq \frac{1}{2x}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}y}_{\geq \frac{1}{2x}}\,\mathrm{d}x = \infty \text{ , d. h. } f \notin L^1(I).$$

**Vereinbarung + Notationen:** Wir benutzen die Notationen: $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Wir schreiben weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,y)\,\mathrm{d}\lambda_n, \quad \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y := \int_{\mathbb{R}^m} f(x,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda_m, \quad \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\,\mathrm{d}\lambda_{n+m}.$$

### 9.2. Satz.

a) Sei $A \in \mathcal{L}^n$, $B \in \mathcal{L}^m$ und $\lambda_n(B) = 0$. Dann ist $\lambda_{n+m}(A \times B) = 0$.

b) Sei $A \in \mathcal{L}^n$, $B \in \mathcal{L}^m$. Dann ist $A \times B \in \mathcal{L}^{n+m}$.

c) Sei $A \in \mathcal{L}^n$, $B \in \mathcal{L}^m$. Dann gilt $\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)$.

**Beweis.** ∎

**9.3. Theorem.** Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar derart, dass $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,\mathrm{d}z$ existiert. Dann existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Integral $\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, und gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^n} \Big( \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

Zum Beweis brauchen wir folgende Definition:

**Fubini-Eigenschaft:** Eine messbare Funktion besitzt die *Fubini-Eigenschaft*, falls für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Integral $\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ und das Integral $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,\mathrm{d}z$ existiert, und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x.$$

**Notation dafür:** $f \in \mathcal{F}$.

**Beweis.** Umformulierung der Aussage: jedes $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar derart, dass $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\,\mathrm{d}z$ existiert, besitzt die Fubini-Eigenschaft.

*Schritt 1:* Für $A \in \mathcal{L}^n$, $B \in \mathcal{L}^m$ gilt $\chi_{A\times B} \in \mathcal{F}$.

*Schritt 2:* Für $\in \mathcal{F}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $cf \in \mathcal{F}$.

*Schritt 3:* Für $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ so, dass $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_1(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_2(z)\,\mathrm{d}z$ sinnvoll ist. Dann ist $f_1 + f_2 \in \mathcal{F}$.

*Schritt 4:* Sei $0 \le f_1 \le f_2$, $f_2 \in \mathcal{F}$ und $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_2(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Dann ist $f_1 \in \mathcal{F}$.

*Schritt 5:* Sei $0 \le f_k \in \mathcal{F}$ und $f_k \nearrow f$. So gilt $f \in \mathcal{F}$ auch.

*Schritt 6:* Sei $G \in \mathbb{R}^{n+m}$ offen. Dann ist $\chi_G \in \mathcal{F}$.

*Schritt 7:* Sei $G \in \mathbb{R}^{n+m}$ eine $G_\delta$-Menge mit $\lambda_{n+m}(G) < +\infty$, d.h. $G = \bigcap_{j=1}^\infty G_j$ mit $G_j$ offen, $G_j \supseteq G_{j+1}$ und $\lambda_{n+m}(G_1) < +\infty$. Dann ist $\chi_G \in \mathcal{F}$.

*Schritt 8:* Sei $N \in \mathcal{L}^{n+m}$ eine Nullmenge. Dann gelten

a) $\chi_N \in \mathcal{F}$ b) $\lambda_m(N_x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

*Schritt 9:* Sei $A \in \mathcal{L}^{n+m}$ mit $\lambda_{n+m}(A) < +\infty$. Dann ist $\chi_A \in \mathcal{F}$.

*Schritt 10:* Für $A \in \mathcal{L}^{n+m}$ gilt $\chi_A \in \mathcal{F}$.

*Schritt 11:* Sei $\varphi \ge 0$ einfache, messbare Funktion. Dann $\varphi \in \mathcal{F}$.

*Schritt 12:* Sei $f \ge 0$ messbare Funktion. Dann ist $f \in \mathcal{F}$.

*Schritt 13 [Beweis des Theorems]:*

■

**Definition:** Sei $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A\}.$$

*Schnitt von A an der Stelle x.*

**9.4. Lemma.**

i) $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar $\Rightarrow A_x$ ist messbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{K}$ messbar $\Rightarrow f(x,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{K}$ messbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

**Beweis.** ■

**9.5. Theorem [Fubini].** Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar und $f : M \to \mathbb{K}$ messbar. Dann gilt

i) $f(x,\,\cdot\,) : M_x \to \mathbb{K}$ ist messbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, und

ii) Für $f \in L^1(M)$ gilt $f(x,\ \cdot\ ) \in L^1(M_x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$,
$\left(x \mapsto \int\limits_{M_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int\limits_M f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{M_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

**Beweis.** ∎

**9.6. Theorem [Tonelli].** Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar und $f : M \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt

i) $f(x,\ \cdot\ ) : M_x \to [0,\infty]$ messbar für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

ii) $x \mapsto \int\limits_{M_x} f(x,,y)\,\mathrm{d}y$, definiert auf $\mathbb{R}^n$ ist messbar und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{M_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_M f(z)\,\mathrm{d}z \in [0,+\infty].$$

**Beweis.** ∎

**9.7. Korollar [Fubini–Tonelli].** Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, $f : M \to \mathbb{K}$ messbar und $\tilde{f}$ die triviale Fortsetzung von $f$ auf $\mathbb{R}^{n+m}$. Ist eines der 3 Integrale

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{f}(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,\ \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |\tilde{f}(z)|\,\mathrm{d}z$$

endlich, so sind alle endlich und einander gleich.

**Beweis.** ∎

**9.8. Geometrische Interpretation des Integrals.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : M \to \mathbb{R}_+$ messbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}x &= \lambda^{n+1}(\underbrace{\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \le t \le f(x), x \in M\}}_{=:A})\\ &= \text{“Maß der Punktmenge unter dem Graphen”}.\end{aligned}$$

Denn: wende Tonelli auf $f = \chi_A$ an.

$$\lambda^{n+1}(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_A\,\mathrm{d}(x,t) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{A_x} \chi_A(x,t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x)]}(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}x$$

**9.9. Cavalierisches Prinzip.** Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ messbar $\Longrightarrow \lambda^{n+1}(M) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^n(M_t)\,\mathrm{d}t$ mit

$$M_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in M\}$$

Denn: Tonelli mit $\chi_M$:

$$\lambda^{n+1}(M) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_M\,\mathrm{d}(x,t) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{M_t}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^n(M_t)\,\mathrm{d}t.$$

**9.10. Bemerkung.**

a) Es seien $(X,\mathcal{M},\mu)$ und $(Y,\mathcal{N},\nu)$ $\sigma$-endliche Maßräume. Analog zu der Definition des Lebesgue-Maßes definiert man das *Produktmaß* $\mu\otimes\nu$ von $\mu$ und $\nu$.

1) Setze $\mathcal{E} := \{A\times B : A\in\mathcal{M}, B\in\mathcal{N}\}$, und $\rho(A\times B) := \mu(A)\times\nu(B)$.
2) Setze $\rho$ mit der Hilfe des Satzes 3.2 fort: $\varphi^\star$ ist das von $\rho$ induzierte äusseres Maß.
3) Betrachte die $\varphi^\star$ messbare Mengen $\mathcal{A}$ und die Einschränkung von $\varphi$ von $\varphi^\star$ auf $\mathcal{A}$. So erhält man $(X\times Y,\mathcal{A},\varphi)$ ein vollsändiger, $\sigma$-endlicher Maßraum (siehe Theorem 3.6).
4) Für $\varphi$ und $A\in\mathcal{M}, B\in\mathcal{N}\}$ gilt $\varphi(A\times B) := \mu(A)\times\nu(B)$.

Setze $\mu\otimes\nu := \varphi$. So heißt $(X\times Y,\mathcal{A},\mu\otimes\nu)$ der *Produktmaßraum* von $(X,\mathcal{M},\mu)$ und $(Y,\mathcal{N},\nu)$.

b) Für $\mu=\lambda_m$ und $\nu=\lambda_n$ ist das Produktmaß $\lambda_m\otimes\lambda_n=\lambda_{m+n}$.

c) Die Analoge Aussagen zu den Sätzen von Fubini und Tonelli gelten auch in dieser allgemeinen Situation.

d) Man kann das Produkt von beliebig vielen Maßräumen definieren.

**9.11. Beispiele.**

**a) Volumina von Zylindern.**
Sei $M\subset\mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $a\in\mathbb{R}^{n+1}$. Die Menge $Z := \{(x,0)+ta\in\mathbb{R}^{n+1}, x\in M, 0\le t\le 1\}$ heißt *"Zylinder mit Basis $M$ und Kante $a$"*.

Setze $T:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$, $T(x,t) := (x,0)+ta. \Longrightarrow T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1}) \Longrightarrow Z = T(M\times[0,1])\in\mathcal{L}^{n+1}$ nach 4.12 und

$$\lambda^{n+1}(Z) \overset{4.15}{=} |\det T|\,\lambda^{n+1}(M\times[0,1]) = |\det T|\int_0^1 \lambda^n(M)\,\mathrm{d}t = |\det T|\lambda_n(M).$$

Für die Determinante von $T$ hat man:

$$\det T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & a_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n+1} \end{vmatrix} = a_{n+1},$$

also $\lambda^{n+1}(M) = |a_{n+1}|\lambda_n(M) =$ "Höhe $\times$ Fläche der Basis".

**b) Volumina von Kegeln.**
$M\subset\mathbb{R}^n$ messbar, $a\in\mathbb{R}^{n+1}$. Setze $K := \{(1-t)(x,0)+ta\in\mathbb{R}^{n+1} : 0\le t\le 1, x\in M\}$ (Kegel mit Basis $M$ und Kante $a$). Wähle $T:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$, $(x,t)\mapsto((1-t)x+t(a_1,\cdots a_n), t\,a_{n+1})$. Dann ist $T\in C^\infty$ und $K=T(M\times[0,1])$; 4.12 $\longrightarrow K$ messbar.

$\lambda^{n+1}$ ist Bewegungsinvariant $\Longrightarrow$ oBdA $a=(0,k), k\ge 0$.

$$\text{Cavalieri 9.9} \quad \Longrightarrow \lambda^{n+1}(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n(K_t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad K_t = \begin{cases} \emptyset, & t\ge k \text{ oder } t<0 \\ \left(1-\frac{t}{k}\right)M, & 0\le t\le k \end{cases}$$

$$= \int_0^k \lambda^n\Big(\big(1-\tfrac{t}{n}\big)M\Big)\,\mathrm{d}t$$

Setze $S_t(M) := (1-\frac{t}{n})M$ mit $S_t x := \left(1-\frac{t}{n}\right)x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $S_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda^n(S_t(M)) \overset{4.15}{=} |\det S_t|\lambda^n(M) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \lambda^n(M)$

$$\begin{aligned} \text{also:} \quad \lambda^{n+1}(K) &= \lambda^n(M)\int_0^k \left(1-\tfrac{t}{k}\right)^n \mathrm{d}t = \lambda^n(M)k\int_0^1 s^n\,\mathrm{d}s = \lambda^n(M)\cdot\frac{k}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\lambda^n(Z). \end{aligned}$$

**c) Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$.** Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > o$ setze $B^n(x_0,r) := \{x : x \in \mathbb{R}^n,\ |x-x_0| \le r\}$, und $B^n := N^n(0,1)$. Es gilt

$$\omega_n := \lambda^n(B^n) \overset{\text{Cavalieri}}{=} \int_{-1}^1 \lambda^{n-1}(B_t^n)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad B_t^n = B^{n-1}(0,\sqrt{1-t^2})$$

Hier gilt $\lambda^{n-1}(B_t^n) = (\sqrt{1-t^2})^{n-1}\ \underbrace{\lambda^{n-1}(B^{n-1})}_{=\omega_{n-1}} \Longrightarrow$

$(\star)$
$$\omega_n = \omega_{n-1}\underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt}_{=:b_n}$$

Berechne $b_n$ via Substitution $t := -\cos x$, $\mathrm{d}t = \sin x\,\mathrm{d}x$.

$$b_n = \int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

**Analysis II:** $b_{2n} = \pi\prod_{l=1}^n \frac{2l-1}{2l}$, $b_{2n+1} = 2\prod_{l=1}^n \frac{2l}{2l+1}$
$\Longrightarrow b_n b_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$. Einsetzen in $(\star)$ liefert $\omega_n = b_n b_{n-1}$, $\omega_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}$.

$$\begin{aligned} \text{Nun:} \quad & \omega_1 = \lambda^1((-1,1)) = 2 \\ \Longrightarrow \quad & \omega_2 = b_2\omega_1 = 2\ b_2 = \pi \\ \Longrightarrow \quad & \omega_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}, \quad \omega_{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\pi^n \end{aligned}$$

zusammenfassend:

$$\omega_n = \mathrm{vol}(B^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},\ n \ge 1,$$

da $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$, $\Gamma(n+\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})\prod_{l=0}^n \frac{2l+1}{2}$.

# § 10 Der Transformationssatz und Anwendungen

**Erinnerung:** Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to V$ eine Funktion. $g$ heißt $C^1$-*Diffeomorphismus*, falls $g$ bijektiv und $g$ als auch $g^{-1}$ stetig differenzierbar. Die Ableitung von $g$ wird durch $g'$ bezeichnet.

**10.1. Theorem [Transformationssatz].** Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \to V$ ein $C^1$-Diffeomorphismus. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(V) \iff (f \circ g)|\det g'| \in \mathcal{L}^1(U)$ und in diesem Fall gilt

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}x = \int_U (f \circ g)(y)|\det g'(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Der Beweis ist etwas mühsam also nur in einem einfachen Fall:

**Satz [Spezieller Transformationssatz]:** Sei $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ (also $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und invertierbar), $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $a \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{L}(a + T(M))$. Dann gilt

$$\int_{a+T(M)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(a + Ty)|\det T|\,\mathrm{d}y.$$

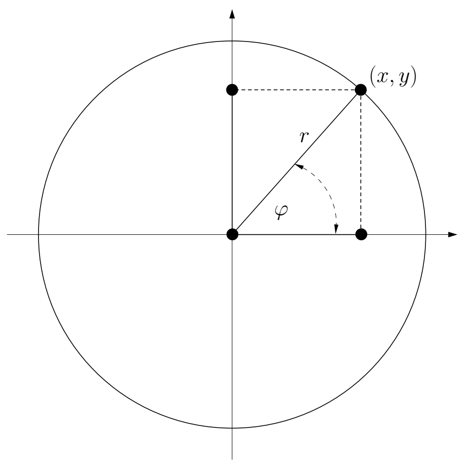
Mit anderen Worten: Sei $g(x) := a + Tx$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann

$$\int_M (f \circ g)(y)|\det g'(y)|\,\mathrm{d}y = \int_{g(M)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $f \in \mathcal{L}^1(g(M))$.

**Beweis.** Es reicht die Aussage nur für positive Funktionen zu beweisen. Bemerke zunächst, dass $g'(y) = T$. Setze $B := \{(x,t) : x \in g(M), 0 \le t \le f(x)\}$ und $\widetilde{B} := \{(y,t) : y \in M, 0 \le t \le (f \circ g)(y)\}$. Definiere $\widetilde{T} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch $\widetilde{T}(x,t) := (Tx, t)$. So ist $\widetilde{T}$ linear und $\det \widetilde{T} = \det T$ und gilt $B = a + \widetilde{T}(\widetilde{B})$. Satz 4.15 liefert $\lambda_{n+1}(a + \widetilde{T}(\widetilde{B})) = |\det T| \cdot \lambda_{n+1}(\widetilde{B})$. Aus 9.8 wissen wir $\lambda_{n+1}(B) = \int_{g(M)} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\lambda_{n+1}(\widetilde{B}) = \int_M (f \circ g)(x)\,\mathrm{d}x$. Diese zusammen liefern die Behauptung. ∎

**10.2. Beispiel [Ebene Polarkoordinaten].**




Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann existiert *eindeutig* ein $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad , \quad r := (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Definiere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via $(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ und

$$\begin{aligned} U : &= \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi\} \\ V : &= \mathbb{R}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\} \text{ geschlitzte Ebene} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow g|_U$ ist ein $C^1$-Diffeomorphismus von $U$ auf $V$ und

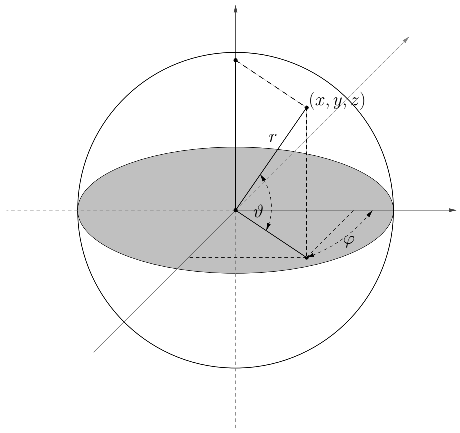
$$g'(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \det g'(r,\varphi) = r > 0$ für alle $(r,\varphi) \in U$. Da $\mathbb{R}^2 \setminus V$ und $\overline{U} \setminus U$ Nullmengen in $\mathbb{R}^2$ sind gilt:

**Korollar:** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar
$\iff$ die Funktion $\big((r,\varphi) \mapsto rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi])$. Es gilt in diesem Fall

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

**10.3. Beispiel [Kugelkoordinaten].**




Definiere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$g(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$$

und

$$\begin{aligned} U: &= \mathbb{R}_+ \times (0,2\pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \\ V: &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann ist $g|_U$ ein $C^1$-Diffeomorphismus von $U$ auf $V$.

$$g'(r,\varphi,\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

So ist die Jacobi-Determinante:

$$\begin{aligned} \det g'(r,\varphi,\vartheta) &= \sin\vartheta\,[r^2\sin^2 g\sin\vartheta\cos\vartheta + r^2\cos^2 g\sin\vartheta\cos\vartheta] \\ &\quad + r^2\cos\vartheta\,[\cos^2 g\cos^2\vartheta + \sin^2 g\sin^2\vartheta] \\ &= \cdots = r^2\cos\vartheta > 0 \end{aligned}$$

**Korollar:** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar $\Longleftrightarrow$ die Funktion $(r,\varphi,\vartheta) \mapsto f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta)r^2\cos\vartheta \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$, und es gilt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)r^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r.$$

**Beweis.** Verwende den Transformationssatz 10.1, den Satz von Fubini 9.3 und ähnliche Argumente wie in 10.2. ■

**10.4. Beispiel [$n$-dimensionale Kugelkoordinaten].** Analog zu Kugelkoordinaten führen wir die folgende Transformation ein: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} g(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{n-1}) &= (x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad \text{mit} \\ x_1 &= r\sin\varphi_{n-1}, \\ x_2 &= r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}, \\ x_3 &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3}, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-3}\cdots\cos\varphi_2\sin\varphi_1, \\ x_n &= r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-3}\cdots\cos\varphi_2\cos\varphi_1. \end{aligned}$$

Dann ist

$$g : \mathbb{R}_+ \times (0,2\pi) \times \underbrace{(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times \cdots (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})}_{n-2} \to \mathbb{R}^n$$

ein $C^1$-Diffeomorphismus. Die Jacobi-Determinante $\det g'(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ ist

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi_{n-1} & r\cos\varphi_{n-1} & 0 & \ldots \\ \cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2} & -r\sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2} & r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2} & \ldots \\ \cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3} & -r\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3} & -r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cos\varphi_{n-1}\cdots\cos\varphi_2\sin\varphi_1 & -r\sin\varphi_{n-1}\cdots\cos\varphi_2\sin\varphi_1 & -r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}\cdots\cos\varphi_2\sin\varphi_1 & \ldots \\ \cos\varphi_{n-1}\cdots\cos\varphi_2\cos\varphi_1 & -r\sin\varphi_{n-1}\cdots\cos\varphi_2\cos\varphi_1 & -r\cos\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}\cdots\cos\varphi_2\cos\varphi_1 & \ldots \end{vmatrix}.$$

Daher erhält man $\det g'(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = r^{n-1}A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$. (Bemerkung: hier gilt eigentlich $A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = \det g'(1,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$.) Man kann $A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ genau bestimmen durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) &= \sin\varphi_{n-1}\cdot(-\sin\varphi_{n-1})\cdot(\cos\varphi_{n-1})^{n-2}A_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2}) - \\ &\qquad - \cos\varphi_{n-1}\cdot(\cos\varphi_{n-1})^{n-1}A_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2}) \\ &= -(\cos\varphi_{n-1})^{n-2}A_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2}). \end{aligned}$$

So bekommt man rekursiv

$$\begin{aligned} A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) &= -(\cos\varphi_{n-1})^{n-2}A_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2}) = \cdots \\ &= -(\cos\varphi_{n-1})^{n-2}(\cos\varphi_{n-2})^{n-3}\cdots\cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Damit ist $\det g'(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = r^{n-1}(\cos\varphi_{n-1})^{n-2}(\cos\varphi_{n-2})^{n-3}\cdots\cos\varphi_2$. Im Folgenden werden wir aber den genaue Wert der Jacobi-Determinante nicht verwenden.

**Korollar:** Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar
$\iff$ die Funktion $h(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) := f(g(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))r^{n-1}A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]\times[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times\cdots[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ liegt. Es gilt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(g(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))r^{n-1}A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\,\mathrm{d}\varphi_{n-1}\dots\,\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}r.$$

**Beweis.** Analog zu 10.3. ∎

**10.5. Beispiel [rotationssymmetrische Funktionen].** Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}, n\geq 2$ heißt *rotationssymmetrisch*, falls $\widetilde{f}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ existiert mit $f(x)=\widetilde{f}(|x|),\ x\in\mathbb{R}^n$.

**Satz:** Für eine rotationssymmetrische Funktion $f$ gilt:
$f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)\iff[r\mapsto r^{n-1}\widetilde{f}(r)]\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma_{n-1}\int\limits_0^\infty \widetilde{f}(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}r,$$

wobei $\sigma_{n-1}\in\mathbb{R}_+$ nur von $n$ abhängt.

**Beweis.** Sei $f$ rotationssymmetrisch und $\widetilde{f}$ wie in der Definition. Wir verwenden 10.4. Dazu bemerke zuerst, dass $|g(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})| = r$. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(g(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))r^{n-1}A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\,\mathrm{d}\varphi_{n-1}\dots\,\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}r \\ &= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{f}(r)r^{n-1}A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\,\mathrm{d}\varphi_{n-1}\dots\,\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}r \\ &= \int\limits_0^\infty \widetilde{f}(r)r^{n-1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A_n(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\,\mathrm{d}\varphi_{n-1}\dots\,\mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}r \\ &= \sigma_{n-1}\int\limits_0^\infty \widetilde{f}(r)r^{n-1}\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

wobei

$$\sigma_{n-1} \overset{\text{Def.}}{:=} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\, \mathrm{d}\varphi_{n-1} \ldots \mathrm{d}\varphi_2\, \mathrm{d}\varphi_1.$$

■

Um $\sigma_n$ zu bestimmen könnten wir direkt die Form von $A_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ verwenden, aber wir geben einen anderen Zugang:

**10.6. Beispiel [Berechnung von $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x$].** Für $a > 0$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{\pi}{2}}.$$

Denn: Satz von Fubini liefert:

$$I_n := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x == \int\limits_{\mathbb{R}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax_1^2}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax_n^2}\,\mathrm{d}x_n = I_1^n.$$

Nun bestimmen wir $I_2$. Es gilt

$$I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Polar.Koord}}{=} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} re^{-ar^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \left.\frac{-e^{-ar^2}}{2a}\right|_{r=0}^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

So gilt $I_n = I_1^n = I_2^{n/2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}$.

**10.7. Beispiel [Berechnung von $\sigma_{n-1}$].** Für $n \geq 2$ gilt $\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

Denn: sei $a = 1$ und betrachte $I_n$ aus 10.6. Da $e^{-|x|^2}$ rotationssymmetrisch ist, gilt nach 10.5 $I_n = \sigma_{n-1} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2}\,\mathrm{d}r$. Nach Definition der Gamma-Funktion $\Gamma$ erhalten wir

$$I_n = \sigma_{n-1} \int\limits_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \overset{s=r^2}{=} \sigma_{n-1} \int\limits_0^{\infty} s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s} \frac{1}{2\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = \frac{\sigma_{n-1}}{2} \int\limits_0^{\infty} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-s}\,\mathrm{d}s \overset{\text{Def!}}{=} \frac{\sigma_{n-1}}{2} \Gamma(\tfrac{n}{2}).$$

Erinnerung $\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s}\,\mathrm{d}s$.

**10.8. Beispiel [Volumen der Einheitskugel].** Es gilt

$$\omega_n := \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}) = \sigma_{n-1} \int\limits_0^1 r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma_{n-1}}{n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

da $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ durch partielle Integration.

# § 11 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Ziel: Flächeninhalt gekrümmter Flächen; Integral auf gekrümmten Flächen.

**11.1. Definition [Parallelotop].** Es seien $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$, $d \leq n$. Das von $a_1, a_2, \dots, a_d$ erzeugte *Parallelotop* ist

$$P(a_1, a_2, \dots, a_d) := \Big\{ \sum_{j=1}^{d} \alpha_j a_j : 0 \leq \alpha_j \leq 1 \Big\}.$$

**Oberfläche eines Parallelotops:** Wir suchen eine Funktion $\mathrm{vol}_d(a_1, a_2, \dots, a_d) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mit Eigenschaften

1) $\mathrm{vol}_d(a_1, a_2, \dots, \lambda a_i, \dots a_d) = |\lambda| \mathrm{vol}_d(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_d)$ für $1 \leq i \leq d$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\mathrm{vol}_d(a_1, a_2, \dots, a_i + a_j, \dots a_d) = \mathrm{vol}_d(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots a_d)$ für $1 \leq i, j \leq d$, $i \neq j$.

3) Für $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$ orthogonale Einheitsvektoren gilt $\mathrm{vol}_d(a_1, a_2, \dots, a_d) = 1$.

**Satz:** Es gibt eine eindeutige Funktion $\mathrm{vol}_d(a_1, a_2, \dots, a_d) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ mit Eigenschaften 1), 2) und 3), welche durch $\big(\det A^\top A\big)^{1/2}$ gegeben werden kann, hier ist $A$ die $n \times d$ -Matrix mit Spalten $a_1, a_2, \dots, a_d$.

**11.2. Definition.**

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann heißt $\gamma \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *Immersion* oder *reguläre Parameterdarstellung*, falls $\gamma'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ injektiv für alle $x \in \Omega$ (oder falls Rang $\gamma'(x) = d$ für alle $x \in \Omega$). So heißt $\gamma\Omega$ *Oberflächenstück*.

b) Eine Immersion $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt *Einbettung*, falls $f : \Omega \to f(\Omega)$ ein Homöomorphismus ist.

**11.3. Definition [Der Maßtensor einer Immersion].**

a) Sei $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ linear. Definiere quadratische Form $q$ auf $\mathbb{R}^d$ via

$$q(x) = \langle Ax, Ax \rangle = x^T A^T A x, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Falls $A$ injektiv ist, so ist $q$ positiv definit. [denn $x \neq 0 \Longrightarrow Ax \neq 0 \Longrightarrow q(x) > 0$] $A^T A$ heißt der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$) *induzierte Maßtensor von* $A$ oder auch *Gramsche Matrix von* $A$.

b) Sei speziell $A := \gamma'(x)$ und $\gamma$ Immersion, $x \in \Omega$. Dann heißt die induzierte quadratische Form $q$ auf $\mathbb{R}^d$ *metrische Fundamentalform* mit Matrixdarstellung $\gamma'(x)^T \gamma'(x)$. Diese $d \times d$-Matrix heißt *Gramsche Matrix* oder Maßtensor. $q$ ist positiv definit, da $\gamma'$ injektiv nach Voraussetzung.

**11.4. Definition.** Sei $\gamma : \Omega \to U$ eine Einbettung. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ *integrierbar über* $U$, wenn die Funktion $(f \circ \gamma) \cdot \sqrt{g_\gamma}$ über $\Omega$ integrierbar ist. Der Ausdruck

$$\int_U f \, \mathrm{d}\sigma := \int_\Omega f(\gamma(x)) \cdot \sqrt{g_\gamma(x)} \, \mathrm{d}x$$

heißt *Oberflächenintegral*. Ist die Funktion $f$, $x \mapsto 1$ über $U$ integrierbar, so heißt

$$\nu_d(U) := \int_U 1 \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \sqrt{g_\gamma(x)} \, \mathrm{d}x$$

der *Flächeninhalt* oder das *d-dimensionale Maß von* $U$.

**Bemerkung:** Es seien $\gamma_i : \Omega_i \to U$ Einbettungen $i = 1, 2$. Man zeigt dann, dass

$$\int\limits_{\Omega_1} f(\gamma_1(x)) \cdot \sqrt{g_{\gamma_1}(x)}\, \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega_2} f(\gamma_2(x)) \cdot \sqrt{g_{\gamma_2}(x)}\, \mathrm{d}x$$

gilt. Damit ist die obige Definition von der Parametrisierung unabhängig. Denn: Sei $\Phi : \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$. Man zeigt, dass $\Phi$ ein $C^1$-Diffeomorphismus ist. So gilt $\gamma_1 \circ \phi = \gamma_2$, und so folgt nach der Anwendung des Kettenregel: $\gamma_2' = (\gamma_1' \circ \Phi)\Phi'$. Daher ist $g_{\gamma_2} = \det(\Phi'^\top((\gamma_1'^\top \gamma_1') \circ \Phi) \cdot \Phi') = (\det \Phi')^2 g_{\gamma_1} \circ \Phi$. Der Transformationssatz 10.1 liefert

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_1} f(\gamma_1(x)) \cdot \sqrt{g_{\gamma_1}(x)}\, \mathrm{d}x &= \int\limits_{\Omega_2} f(\gamma_1(\Phi(x)))\sqrt{g_{\gamma_1}(\Phi(x))}\big|\det \Phi'(x)\big|\, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\Omega_2} f(\gamma_2(x))\sqrt{g_{\gamma_1}(\Phi(x))}\big|\det \Phi'(x)\big|\, \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\Omega_2} f(\gamma_2(x))\sqrt{g_{\gamma_2}(x)}\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

**11.5. Beispiele.**

**a) Bogenlänge, Kurveintegral.** Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ Einbettung, $I = (a, b)$, $M = \gamma(I)$. So heißt $\gamma$ reguläre *Kurve*. $\Longrightarrow \gamma'^\top \cdot \gamma' = |\gamma'|^2$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_M f\, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_I f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t$$

(vergleich Analysis II)

**b) Zweidimensionalen Oberflächen in $\mathbb{R}^3$.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^3$ Einbettung. Dann gilt $\gamma(x, y) = (\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y), \gamma_3(x, y))^\top$ und

$$\gamma' = \begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma_1}{\partial x} & \frac{\partial\gamma_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\gamma_2}{\partial x} & \frac{\partial\gamma_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\gamma_3}{\partial x} & \frac{\partial\gamma_3}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{und so} \quad \gamma'^\top\gamma' = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial\gamma_3}{\partial x}\right]^2 & \frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\frac{\partial\gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_3}{\partial x}\frac{\partial\gamma_3}{\partial y} \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial x}\frac{\partial\gamma_1}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\frac{\partial\gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_3}{\partial x}\frac{\partial\gamma_3}{\partial y} & \left[\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial\gamma_2}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial\gamma_3}{\partial y}\right]^2 \end{pmatrix}.$$

So erhält man durch Rechnen

$$g_\gamma = \det \gamma'^\top\gamma' = \left|\frac{\partial\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right|^2 \quad \text{(Kreuzprodukt).}$$

**c) Oberfläche eines Paraboloids.** $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega = \{(u, v) : 0 \le u^2 + v^2 \le 2\}$, $P = \gamma(\Omega)$

$$\begin{aligned}\gamma_1(u, v) &= u \\ \gamma_2(u, v) &= v \\ \gamma_3(u, v) &= 2 - u^2 - v^2\end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial u}\gamma(u, v) = (1, 0, -2u)$, $\frac{\partial}{\partial v}\gamma(u, v) = (0, 1, -2v)$ also $\frac{\partial}{\partial u}\gamma \times \frac{\partial}{\partial v}\gamma = (2u, 2v, 1) \Longrightarrow |\frac{\partial}{\partial u}\gamma \times \frac{\partial}{\partial v}\gamma| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$ also

$$\begin{aligned}\int\limits_P \mathrm{d}\sigma &= \int\limits_\Omega (1 + 4u^2 + 4v^2)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}(u, v) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}} (1 + 4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} r\, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{\sqrt{2}} = \pi\frac{26}{6}.\end{aligned}$$

**d) Fundamentaltensor von Graphen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ Parameterdarstellung $\gamma(x) = \binom{x}{f(x)}$, $x \in \Omega$. Dann gilt $\sqrt{g(x)} = \sqrt{1 + |f'(x)|^2}$. Dies zu zeigen brauchen wir folgenden Begriff.

**Definition [äusseres Produkt]:** Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die $n \times (n-1)$-Matrix $A$ mit Spalten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, und deren $(n-1) \times (n-1)$ Teilmatrizen $A_k$ die aus $A$ durch Weglassen der $k$ten Zeile entstehen. Setze $\alpha_k := (-1)^{k-1} \det A_k$. So definiert man das *äusseres Produkt* $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}$ der Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^\top.$$

Sei jetzt $b \in \mathbb{R}^n$ und betrachte die Matrix $B$ mit Spalten $b, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Nun entwickelt man $\det B$ nach der ersten Spalte:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} b_j \det A_j = \langle b, a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} \rangle. \tag{1}$$

Insbesondere gilt $\det B = 0$ für $b = a_k$, so sieht man, dass $a_k$, $k = 1, \ldots, n-1$ auf $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}$ orthogonal sind. Sei jetzt $b = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}$ und betrachte die obige Matrix $B$. So gilt dann

$$B^\top B = \begin{pmatrix} b^\top \\ A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^\top b & 0 \\ 0 & A^\top A \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $(\det B)^2 = \det(B^\top B) = |b|^2 \det(A^\top A)$. Aus (1) wissen wir $|b|^2 = \det B$, und daher $\det A^\top A = |b|$.

Nun zurück zu unserem ursprünglichen Problem. Sei $\gamma(x) = \binom{x}{f(x)}$. So gilt

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Sei jetzt $A = \gamma'(x)$. Die Spalten von $A$ bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Es ist leicht zu zeigen, dass

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_{n-1}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir wenden die Obigen auf $A$ an: $\det(A^\top A) = |a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}| = \sqrt{1 + |f'(x)|^2}$, so folgt die Behauptung.

**e) Integration über Sphäre.** Betrachte die Sphäre $S_r^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = r\}$ und die Menge $A := \{(x, 0, z) \in S_r^2 : x \leq 0\}$ die längs $A$ geschlitzte Sphäre $S_r^2 \setminus A$ hat Darstellung $\gamma(\varphi, \theta) = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)^\top \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi, \theta) \in \Omega := (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. So gilt

$$\gamma'(\varphi, \theta)^\top \gamma'(\varphi, \theta) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \sqrt{g_\gamma(\varphi, \theta)} = r^2 \cos\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{S_r^2 \setminus A} f \, \mathrm{d}\sigma = r^2 \int_\Omega f(\gamma(\varphi, \theta)) \cos\theta \, \mathrm{d}(\varphi, \theta).$$

Für $f \equiv 1$ ergibt sich

$$r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = 4\pi r^2.$$

**f) Oberfläche der $n$-Sphäre.** Sei $n \geq 1$ und $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, und $S^n_+ := \{x \in S^n : x_{n+1} > 0\}$. So ist $S^n_+$ darstellbar als Graph von $k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k(x) = \sqrt{1-|x|^2}$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Es gilt

$$k'(x) = \Big(\tfrac{-x_1}{\sqrt{1-|x|^2}}, \tfrac{-x_2}{\sqrt{1-|x|^2}}, \dots, \tfrac{-x_n}{\sqrt{1-|x|^2}}\Big),$$

damit ist

$$\sqrt{g_\gamma(x)} = \sqrt{1 + \tfrac{|x_1|^2}{1-|x|^2} + \tfrac{|x_2|^2}{1-|x|^2} + \cdots + \tfrac{|x_n|^2}{1-|x|^2}} = \sqrt{\tfrac{1}{1-|x|^2}}.$$

Mit Verwenden der Rotationssymmetrie gilt nach 10.5

$$\kappa_n := \int\limits_{S^{n-1}_+} \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\Omega} \sqrt{g_\gamma(x)} \, \mathrm{d}x = \sigma_{n-1} \int\limits_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} \, \mathrm{d}r.$$

Ferner gelten

$$\text{(2)} \qquad \int\limits_0^1 \frac{r^{n+1}}{\sqrt{1-r^2}} \, \mathrm{d}r \overset{\text{Part.Int.}}{=} n \int\limits_0^1 r^{n-1}\sqrt{1-r^2} \, \mathrm{d}r$$

$$\text{(3)} \qquad \int\limits_0^1 \frac{r^{n+1}}{\sqrt{1-r^2}} \, \mathrm{d}r = \int\limits_0^1 \frac{r^2 r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} \, \mathrm{d}r = \int\limits_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{(1-r^2)r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} \, \mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} \, \mathrm{d}r - \int\limits_0^1 r^{n-1}\sqrt{1-r^2} \, \mathrm{d}r.$$

So erhalten wir aus (2) und (3)

$$(n+1) \int\limits_0^1 r^{n-1}\sqrt{1-r^2} \, \mathrm{d}r = \int\limits_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} \, \mathrm{d}r.$$

Aber wegen Rotationssymmetrie

$$\sigma_{n-1} \int\limits_0^1 r^{n-1}\sqrt{1-r^2} \, \mathrm{d}r = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1-|x|^2} \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{vol}_{n+1}(B^{n+1}) = \tfrac{1}{2}\omega_{n+1}.$$

So erhält man (siehe auch 10.8)

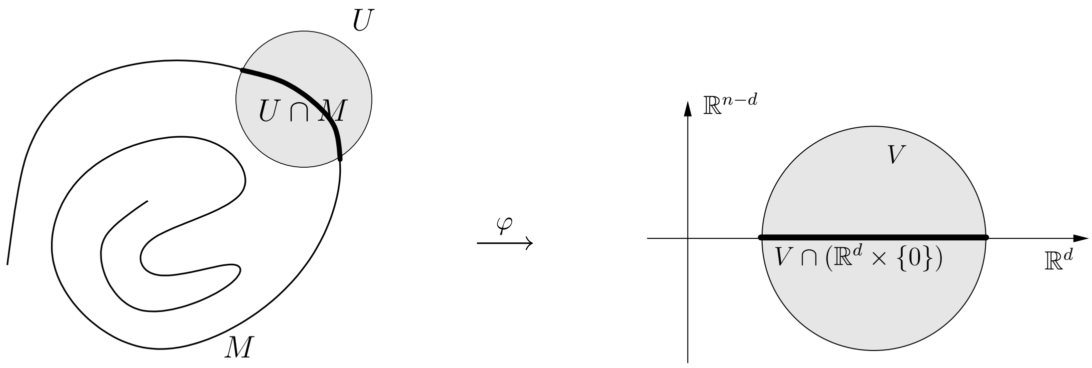
$$\kappa_n = \frac{n+1}{2}\omega_{n+1} = \frac{n+1}{2} \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)} = \frac{n+1}{2} \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\frac{n+1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

### 11.6. Definition.

a) Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. $M$ heißt $d$-dimensionale (differenzierbare) *Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$, falls für alle $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $a$ existiert, sowie ein Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $\varphi(M \cap U) = U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. (Ist $d = n$ so versteht man $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ als $\mathbb{R}^n$).

b) Ein solcher Diffeomorphismus $\varphi$ heißt *Karte* für $M$ und $M \cap U$ deren *Kartengebiet*.

c) $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ heißen *Hyperflächen*.




**11.7. Satz.** Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen ist. $\Longrightarrow$ Graph $f$ ist $d$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+d}$.

**Beweis.** Sei $U := \Omega \times \mathbb{R}^n$, und $\varphi : U \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,y) = (x, y - f(x))$. Dann ist $\varphi$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(U) \subseteq U$ und $\varphi(U \cap \operatorname{Graph} f) = \Omega \times \{0\}$. ■

**11.8. Definition.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann heißt $x \in U$ *regulärer Punkt* von $f$, falls $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist. Weiter: $y \in \mathbb{R}^m$ heißt *regulärer Wert* von $f$, falls alle Elemente von $f^{-1}(y)$ reguläre Punkte sind.

**Bemerkung:** Ist $y \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von $f$, so hat $f'(x)$ in allen Punkten $x \in f^{-1}(y)$ den Rang $m$. Falls $f'(x)$ nicht surjektiv ist, so heißt $x$ *singulärer Punkt* und $f(x)$ *singulärer Wert* von $f$. Satz von Morse–Sard zeigt, dass singuläre Werte von $C^1$-Abbildungen Lebesgue-Maß 0 haben.

**11.9. Theorem [implizite Funktion].** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner sei $(x_0, y_0) = z_0 \in \Omega$ eine Nullstelle von $f$, d.h., $f(x_0, y_0) = 0$. Sei $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U' \subseteq \mathbb{R}^m$, $(x_0, y_0) \in U \times U' \subseteq \Omega$ und $g : U \to U'$ stetig differenzierbare Funktion so, dass $f(x,y) = 0$, $(x,y) \in U \times U'$ genau dann, wenn $y = g(x)$, $x \in U$.

**11.10. Satz [Satz von regulärem Wert].** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^m$ sei regulärer Wert von $f$. Dann ist $f^{-1}(c)$ Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - m$.

**Beweis.** Verwende den Satz von impliziten Funktionen 11.9. ■

**11.11. Korollar.** Sei $m = 1$ in 11.10 und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(c)$. Dann ist $f^{-1}(c)$ ist Hyperebene des $\mathbb{R}^n$.

**11.12. Beispiel.**

a) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ ist $n$-dimensionale Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$. Denn: $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2$ ist differenzierbar und $S^n = f^{-1}(1)$, da $f'(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(1)$ ist 1 regulärer Wert von $f$ und 11.11 liefert die Behauptung. $S^n$ heißt *$n$-Sphäre*.

b) orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : A^\top A = Id\}$ ist Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

**11.13. Lemma.** Sei $M$ eine $d$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Dann ist jedes Kartengebiet $U \subset M$ das Bild einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ unter einer Einbettung.

**Beweis.** Sei $\varphi : U' \to V$ Karte und $U' \cap M = U$, $U' \in \mathbb{R}^n$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ derart, dass $\Omega \times \{0\} = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. Setze $\gamma(x) := \varphi^{-1}(x, 0)$. Dann gilt $\gamma : \Omega \to U$ Einbettung (der Rang von $\gamma'(x) = d$ für alle $x \in \Omega$). ∎

**11.14. Satz [Zerlegung der Eins].** Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ offene Überdeckung mit Kartengebieten $U_i$ (solche Überdeckungen heißen *Atlas*). Zusätzlich nehmen wir an, dass die Überdeckung *lokal finit* ist, d.h., für alle $x \in M$ existiert eine Umgebung $V_x$, die nur endlich viele Mengen $U_i$ schneidet. Dann existieren Funktionen $\varphi_i \in C^1(M)$, $i \in \mathbb{N}$ derart, dass

i) $0 \leq \varphi_i \leq 1$.

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) = 1$ für $x \in M$.

iii) Für den Träger $\operatorname{supp} \varphi_i$ gilt $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_i$.

**Bemerkung:**

a) Man kann zeigen, dass Überdeckungen mit den im Satz stehenden Eigenschaften immer existieren.

b) Das System $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt *der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins* zu $M$.

**11.15. Definition [Integral auf Untermannigfaltigkeiten].** Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Betrachte eine Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $M$ und eine zu dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus Satz 11.14. Die Funktion heißt *integrierbar auf* $M$, falls die Funktionen $(f \cdot \varphi_i)|_{U_i}$, $i \in \mathbb{N}$ integrierbar sind. In diesem Falls definiert man das Integral von $f$ über $M$ durch

$$\int_M f \, \mathrm{d}\sigma := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{U_i} (f \cdot \varphi_i)|_{U_i} \, \mathrm{d}\sigma.$$

**Bemerkung:** Es ist möglich zu zeigen, dass der Begriff "$f$ ist integrierbar" und "das Integral von $f$ über $M$" hängen *nicht* von dem Wahl der Überdeckung oder der Zerlegung der Eins ab.

**11.16. Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in M$. Wir nennen $a \in \mathbb{R}^n$ *Tangentialvektor an* $M$ *in* $x_0$, falls Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ existiert, stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = a$. $T_{x_0}M := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentialvektor an } M \text{ in } x_0\}$ heißt *Tangentialraum* von $M$ im Punkt $x_0$.

**11.17. Lemma.** Sei $M$ $d$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $x_0 \in M$. Dann gilt

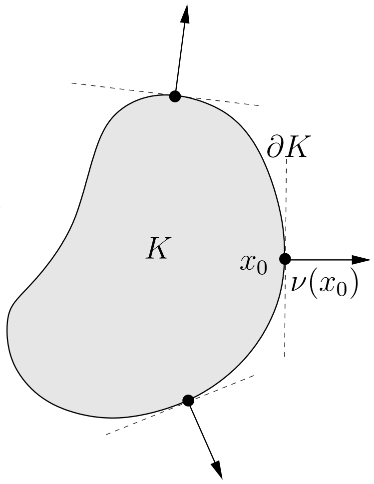
a) $T_{x_0}M$ ist $d$-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

b) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m), c \in \mathbb{R}^m$ regulärer Wert von $f$ und $M = f^{-1}(c) \implies T_{x_0}M = \ker f'(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : f'(x_0)v = 0\}$.

c) Sei $N_{x_0}M := (T_{x_0}M)^{\perp}$ (Orthogonalkomplement) der *Normalenraum in* $x_0$. Dann ist $N_a M$ Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - d$.

d) Ist $m = n - d$ in b), so bilden $f_1'(x_0), \cdots f_{n-d}'(x_0)$ eine Basis um $N_{x_0}M$. (Hier ist $f = (f_1, \ldots, f_{n-d})$).

**11.18. Notation und Diskussion.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir sagen $K$ hat *glatten Rand*, falls für alle $x_0 \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $x_0$ und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ existiert mit




$$K \cap U = \{x \in U : \varphi(x) \leq 0\} \text{ und } \varphi'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U.$$

Es gilt dann:

$$\partial K \cap U = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$$

Unter diesen Bedingungen ist $\partial K$ eine kompakte Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$ und es existiert genau ein Vektor $\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n$ mit

i) $\nu(x_0) \perp T_{x_0}(\partial K)$,

ii) $\|\nu(x_0)\| = 1$,

iii) es existiert $\varepsilon > 0 : x_0 + t\nu(x_0) \notin K$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$.

Es existiert deshalb eine stetige Abbildung $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$ so, dass $\nu(x_0)$ für $x_0 \in \partial K$ der äußere *Normaleneinheitsvektor* an $x_0$ ist. Diese Abbildung heißt *Normaleneinheitsfeld*.

**Notationen:**

a) Für die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $x$ sind neben dem üblichen $f'(x)$ die alternative Notationen $\nabla f(x)$, $Df(x)$, $\partial f(x)$ oder $\mathrm{grad} f(x)$ im Literatur oft benutzt. Dabei heißt $f'(x)$ *Gradient* von $f$.

b) Der *Laplace-Operator* $\Delta$ ist definiert durch

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}.$$

c) Die *Divergenz* von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\mathrm{div}\, f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Formal ist "$\mathrm{div}\, f = \nabla \cdot f$".

**11.19. Theorem [Satz von Gauß].** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$ äußeres Normaleneinheitsfeld. Ferner sei $K \subset U, U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_K \mathrm{div}\, F \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial K} \langle F, \nu \rangle \, \mathrm{d}\sigma.$$

Obiger Satz gilt in wesentlich allgemeineren Rahmen auch noch.

**11.20. Korollar [Satz von Green].** Voraussetzung: Wie oben in 11.19, $f, g \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann

$$\int_K (f\Delta g - g\Delta f) \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial K} \left( f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}\sigma,$$

wobei $\frac{\partial g}{\partial \nu}(x) = \langle f'(x), \nu(x) \rangle$ die Ableitung in Normalenrichtung bezeichnet.