Vorlesung Mehrfachintegration

TU Darmstadt, WS 2004/05

Helge Glöckner

Inhaltsverzeichnis:

Vorwort

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen setzt das (bestimmte) Integral einer Funktion in Beziehung zu ihrer Stammfunktion und stellt die Integration als eine "Umkehrung" des Differenzierens dar. Er gibt uns damit ein Werkzeug in die Hand, konkrete Integrale explizit zu berechnen.

In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher, wo die Verhältnisse leider nicht mehr so einfach sind. Das hat sich bereits bei der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ angedeutet, bei der Methoden der linearen Algebra ins Spiel kamen. In der mehrdimensionalen Integralrechnung sehen wir uns dem Problem gegenüber, dass es zum Berechnen von Integralen kein Werkzeug gibt, das ähnlich griffig wäre wie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$. Zwar werden wir gegen Ende des Semesters den *Gaußschen Integralsatz* kennenlernen, der sich im Eindimensionalen auf den Hauptsatz reduziert; jedoch spielt er nicht die gleiche Rolle.

Zur mehrdimensionalen Integralrechnung gibt es im wesentlichen zwei Zugänge. Der erste Zugang über das Riemann-Integral ist weniger abstrakt und hat den Vorteil, dass man direkt an Vertrautes anknüpfen kann. Jedoch trägt der Ansatz nicht weit genug: Viele für die Analysis und ihre Anwendungen wichtige Resultate bleiben so unerreichbar. Wir folgen hier daher einem zweiten Zugang, der uns über die Maßtheorie zum Lebesgueschen Integral führen wird. Die Vorteile des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral werden hierbei schnell deutlich werden.

In Teil I sehen wir uns einige Grundbegriffe der Maßtheorie an, die für alles Weitere unentbehrlich sind. Dann beschäftigen wir uns mit allgemeiner Integrationstheorie (Teil II). In Teil III werden die wichtigsten Hilfsmittel zur konkreten Berechnung von Mehrfachintegralen bereitgestellt: Der Satz von Fubini und die Transformationsformel für Integrale (das Analogon der Substitutionsregel aus der Analysis I). In den letzten beiden Teilen des Skripts wenden wir uns der Integration über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ und den Integralsätzen von Gauß, Green und Stokes zu, die beispielsweise für die Physik von fundamentaler Bedeutung sind.

Das vorliegende Skript basiert teilweise auf Prof. Neebs Skript zur Mehrfachintegration im WS 1999/2000 und dem darauf aufbauenden Skript Prof. Rochs zur Mehrfachintegration im WS 02/03 (deren elektronische Files freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurden).

Hinweis: Einige Routinerechnungen werden dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Jede dieser Aufgaben wird auch tatsächlich in einer Gruppen- oder Hausübung vorkommen, so dass man bei Bedarf später die detaillierten Beweise in der Musterlösung nachlesen kann.

Literatur

Da das Skript in sich geschlossen ist, ist weitere Lektüre für das Verständnis nicht erforderlich. Dennoch möchte ich Ihnen einige Hinweise zur Lehrbuchliteratur geben.

Exzellente Bücher zur Maß- und Integrationstheorie sind u.a.

- H. Bauer, "Maß- und Integrationstheorie," de Gruyter, Berlin, 1992;
- W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.

Hierbei ist Bauers Buch mehr auf die Bedürfnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie ausgerichtet, während sich Rudins Buch an angehende Analytiker richtet. Beide Bücher gehen allerdings weit über die Ziele der Vorlesung hinaus; geeignet sind sie eher zur späteren Vertiefung der Maß- und Integrationstheorie im Hauptstudium. Auch setzen sie Vorkenntnisse der Topologie voraus, die wir für unsere bescheideneren Zwecke umgehen können.

Ebenfalls für eine vertiefende Beschäftigung mit Maß- und Integrationstheorie geeignet ist

- J. Elstrodt, "Maß- und Integrationstheorie," Springer-Verlag, Berlin, 2002;

in diesem Buch finden Sie auch eine Fülle an Hintergrundwissen und historischen Randbemerkungen.

Anwendungen und schöne Aufgaben findet man in Forsters Buch

- O. Forster, "Analysis 3," Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984,

in dem allerdings ein unüblicher (mit der Vorlesung nicht verträglicher) Zugang zur Integrationstheorie verfolgt wird, der die (für viele Zwecke wichtige!) Maßtheorie vermeidet.

In der Bibliothek finden Sie auch

- Th. Bröcker, "Analysis II" sowie "Analysis III," jeweils B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1992

(recht knapp!).

Eine weiter in die Tiefe gehende Diskussion der Integralsätze finden Sie bei Forster oder Bröcker, die jedoch gleich Differentialformen auf Untermannigfaltigkeiten behandeln (während wir uns hier auf die klassischen Integralsätze beschränken).

Hinweise zur Gestaltung und Benutzung des Skripts

Das vorliegende Skript wurde für die Vorlesung "Mehrfachintegration im WS 2004-05" verfasst und spiegelt die besonderen Gegebenheiten dieser Veranstaltung wider, die sich an einen heterogenen Hörerkreis richtete, darunter insbesondere Drittsemester des Studiengangs MCS sowie Viertsemester (Sommeranfänger) des Diplomstudiengangs. Um dem gemischten Hörerkreis und den verschiedenen Vorkenntnissen Rechnung zu tragen, wurde alles daran gesetzt, das Skript in sich geschlossen zu halten und lediglich einige Standardresultate aus Forster I und II zu benutzen. Insbesondere konnte die Kenntnis von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ nicht vorausgesetzt werden, die folglich im Skript eingeführt werden mussten. Neben seiner Ausführlichkeit gehört zu den Merkmalen des Skripts:

- Es wurde versucht, die typischen Argumentationsweisen und Grundstrukturen der Maß- und Integrationstheorie herauszuarbeiten. Hierzu gehören einerseits die zwei großen Beweisprinzipien, andererseits die Grundkonstruktionen von Maßen wie z.B. Bildmaße sowie Maße mit Dichten, auf die sich dann viele spätere Beweis- und Konstruktionsschritte zurückführen lassen.

- Jedoch wurde auf die Einführung von Produkten von Messräumen und die Diskussion von Produktmaßen verzichtet, um den Aufwand und die zusätzlichen abstrakten Begriffe zu vermeiden. Um dies zu ermöglichen, wurde der Satz von Fubini nur für das Lebesgue-Borel-Maß formuliert; zum Beweis wird der Satz hier auf das Prinzip von Cavalieri zurückgeführt und dieses wiederum auf die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes.

- Um den zeitlichen Rahmen nicht zu sprengen, wird im Hauptteil des Skripts zwar die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes bewiesen, nicht aber seine Existenz. Für Interessierte steht der Existenzbeweis in einer auf das Skript abgestimmten Form als Anhang bereit.

- Das Skript enthält keinerlei Skizzen oder Figuren. Insbesondere beim Erklären der Kugel- und Zylinderkoordinaten sowie bei der Diskussion von Untermannigfaltigkeiten sind diese natürlich unverzichtbar, und die einschlägigen Skizzen sollten an die Tafel gezeichnet und handschriftlich ins Skript übernommen werden.

Benutzung des Skripts im Wintersemester: Das Skript enthält etwas mehr Stoff, als in einer 2+2-Vorlesung im Wintersemester bewältigt werden kann. Die Kapitel über Untermannigfaltigeiten sowie Integration auf Untermannigfaltigkeiten sind etwas ausführlich geraten, und es empfiehlt sich, hier zu kürzen. Insbesondere kann man viele der dort gegebenen Beispiele (z.B. allgemeine Rotationsflächen) weglassen bzw. in die Übungen verlagern, und beim Integrieren sollte man den Spezialfall von Mannigfaltigkeiten mit globaler Karte gründlich erklären, aber getrost die technischen Details des allgemeinen Falls unterschlagen. Auch die Greensche Formel und die Berechnung der Flächeninhalte der n-dimensionalen Sphären sind eher entbehrlich. Es empfiehlt sich, bei der Einführung von Untermannigfaltigkeiten vom Skript abzuweichen und möglicht rasch mit dem Satz über implizite Funktionen zu beweisen, dass Untermannigfaltigkeiten lokal wir Graphen stetig differenzierbarer Funktionen aussehen (nachdem man notfalls die Koordinaten permutiert). Da jeder Graph sich auf eine offensichtliche Art und Weise parametrisieren lässt, hat man dann auch sofort lokale Parametrisierungen für Mannigfaltigkeiten zur Verfügung und kann deren schöne Eigenschaften untersuchen (dass sie also Immersionen sind und Einbettungen mit offenem Bild).

Benutzung des Skripts im Sommersemester: Hier empfiehlt es sich, wie Prof. Neeb und Roch in den Vorgängerveranstaltungen den Beweis des Satzes von Fubini (und des Prinzips von Cavalieri) wegzulassen. Dadurch wird auch die zweite Hälfte von Kapitel 5 (über Dynkinsysteme und das "Prinzip der lieben Mengen") überflüssig, so dass man insgesamt etwa zwei Doppelstunden hinzugewinnt. Um zeitlich zurecht zu kommen, ist es auch wichtig, die den Studierenden zugedachten Beweisteile rechtzeitig als Übung zu stellen. Insbesondere sollten die Studierenden sich rasch nach dem Beweis der Konvergenzsätze die Ergebnisse der ersten Hälfte von Kapitel 5 in einer Übung selbst erarbeiten (Beweisprinzip der Integrationstheorie, allgemeine Transformationsformel, Integration bzgl. Maßen mit Dichten und Reihen von Maßen). Auch empfiehlt es sich, bereits vor Lemma 1.34 in einer Übung mit den Notationen $f_*(\mathcal{S})$ und $f^{-1}[\mathcal{S}]$ vertraut zu machen.

Was nicht mehr in den Koffer passte...

Eine einführende Vorlesung über Mehrfachintegration (und Vektoranalysis) ist keine Vorlesung über Maß- und Integrationstheorie, und in Anbetracht der auch so bereits drängenden Stofffülle mussten einige wichtige Resultate unter den Tisch fallen. Bereits erwähnt wurde der Verzicht auf die Diskussion von Produktmaßen. Schlimmer wiegt, dass L^p-Räume in der Vorlesung nicht diskutiert werden konnten; insbesondere wurden die Höldersche (und verwandte) Ungleichungen nicht behandelt. Erst Recht musste auf fortgeschrittenere Resultate der Maßtheorie verzichtet werden (z.B. auf den Satz von Radon-Nikodym).

Teil I: Grundbegriffe der Maßtheorie

Der abstrakte Rahmen der Maßtheorie sieht folgendermaßen aus: Gegeben ist eine Menge X (z.B. $X = \mathbb{R}^n$), eine Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X sowie eine Funktion

$$\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]\,, \qquad A \mapsto \mu(A)\,.$$

Wir stellen uns vor, dass die Elemente von $\mathcal{S}$ gerade diejenigen Teilmengen von X sind, die man *messen* kann (denen man ein "Volumen" zuordnen kann), und dass $\mu(A)$ das *Maß* (oder "Volumen") von $A \in \mathcal{S}$ ist. Welche Eigenschaften sollte dieser Messprozess aufweisen? Es sollte sicher

$$\mu(\emptyset) \;=\; 0 \tag{1}$$

gelten, und wenn $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt sind, so sollte

$$\mu(A_1 \cup A_2) \;=\; \mu(A_1) + \mu(A_2) \tag{2}$$

sein. Um Approximationsargumente zu ermöglichen (z.B. das Ausschöpfen einer Menge durch eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen), brauchen wir eine Version von (2) für abzählbar vielen Mengen: Wir fordern, dass für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{S}$

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{3}$$

gilt. Damit man (1) und (3) für das Mengensystem $\mathcal{S}$ überhaupt formulieren kann, muss $\mathcal{S}$ natürlich die leere Menge enthalten und gegenüber abzählbaren disjunkten Vereinigungen abgeschlossen sein. Es ist bequem, zusätzlich Abgeschlossenheit von $\mathcal{S}$ unter (nicht notwendig disjunkten) abzählbaren Vereinigungen zu verlangen sowie $A^c \in \mathcal{S}$ für jede Menge $A \in \mathcal{S}$, d.h. Komplemente messbarer Mengen sind ebenfalls messbar. In diesem Falle nennt man $\mathcal{S}$ eine *σ-Algebra*. Eine Funktion $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{S}$, welche die Bedingungen (1) und (3) erfüllt, nennt man ein *Maß*.

1 Messräume und messbare Funktionen

1.1 Messbare Mengen

Die Überlegungen der Einleitung führen auf folgende Definition:

Definition 1.1 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X heißt *σ-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

S1 $\emptyset \in \mathcal{S}$;

S2 Für jede Menge $A \in \mathcal{S}$ ist $A^c := X \setminus A \in \mathcal{S}$, d.h. $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung;

S3 Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen $A_n \in \mathcal{S}$ ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$, d.h. $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

Ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von X, so nennt man das Paar $(X, \mathcal{S})$ einen *Messraum*[1] und die Elemente von $\mathcal{S}$ die *messbaren Mengen*.

Bemerkung 1.2 (a) Jede σ-Algebra $\mathcal{S}$ ist wegen **S2** und **S3** auch abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten, denn aus den de Morganschen Identitäten folgt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\Big)^c \in \mathcal{S}$$

für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}$.

(b) Wegen **S2** ist auch $X = \emptyset^c \in \mathcal{S}$ und weiter erhalten wir für $A, B \in \mathcal{S}$ auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{S}$.

1.3 Beispiele. Es sei X eine beliebige Menge.

(a) $\{\emptyset, X\}$ ist die kleinste σ-Algebra auf X.

(b) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X) := \{A \colon A \subseteq X\}$ (die Menge aller Teilmengen von X) ist die größte σ-Algebra auf X.

(c) Es sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$ derart, dass A oder $X \setminus A$ abzählbar ist. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X (Details: Übung).

(d) Aus σ-Algebren auf X kann man σ-Algebren auf Teilmengen von X gewinnen:

Ist $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist

$$\mathcal{S}|_Y := \{A \cap Y \colon A \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$$

eine σ-Algebra auf Y. Falls $Y \in \mathcal{S}$, so ist $\mathcal{S}|_Y = \{A \in \mathcal{S} \colon A \subseteq Y\}$.

Beispielsweise folgt aus $\emptyset \in \mathcal{S}$ sofort $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{S}|_Y$, d.h. $\mathcal{S}|_Y$ erfüllt **S1**. Die restlichen Details überprüfen wir in der Übung.

Definition 1.4 Die σ-Algebra $\mathcal{S}|_Y$ aus Beispiel 1.3 (d) wird die *Spur von $\mathcal{S}$ auf Y* genannt.

Lemma 1.5 *Es sei X eine Menge.*

(a) *Ist $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge von σ-Algebren auf X, so ist deren Durchschnitt*[2]

$$\bigcap \mathcal{M} := \bigcap_{\mathcal{S}\in\mathcal{M}} \mathcal{S} = \{A \subseteq X : A \in \mathcal{S} \text{ für alle } \mathcal{S} \in \mathcal{M}\}$$

ebenfalls eine σ-Algebra auf X.

[1] Auch das Wort "messbarer Raum" ist gebräuchlich.
[2] Hier ist also $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

(b) *Für jede Menge $\mathcal{E}$ von Teilmengen von X (also $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$) gibt es eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält.*[3]

Beweis. (a) **S1**: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{S}$ für alle $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ und somit $\emptyset \in \bigcap \mathcal{M}$. **S2**: Ist $A \in \bigcap \mathcal{M}$, so gilt $A \in \mathcal{S}$ für alle $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ und somit auch $A^c \in \mathcal{S}$, da $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. Somit $A^c \in \bigcap \mathcal{M}$. **S3**: Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \bigcap \mathcal{M}$. Für jedes $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ gilt dann $A_n \in \mathcal{S}$ für jedes n und somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$, da $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. Folglich ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap \mathcal{M}$.

(b) Wir betrachten die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ aller σ-Algebren $\mathcal{S}$ auf X derart, dass $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Die Menge $\mathcal{M}$ ist nicht leer, denn $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält (siehe Beispiel 1.3 (b)). Nach Teil (a) ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \mathcal{M}$$

eine σ-Algebra. Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ für alle $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$, gilt $\mathcal{E} \subseteq \bigcap \mathcal{M} = \sigma(E)$; es ist also $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Ist nun $\mathcal{S}$ irgendeine σ-Algebra auf X, die $\mathcal{E}$ enthält, so ist $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ und somit $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$. Also ist in der Tat $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste solche σ-Algebra. □

Definition 1.6 In Lemma 1.5 (b) nennt man $\sigma(\mathcal{E})$ die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra*. Ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ eine Teilmenge mit $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$, so nennt man $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* für die σ-Algebra $\mathcal{S}$.

Beispiel. Wir betrachten die Menge $\mathcal{E} := \big\{\{1,2\}, \{2,3\}\big\}$ von Teilmengen von $X := \{1,2,3\}$. Da $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, gilt

$$\{1,2\} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \{2,3\} \in \sigma(\mathcal{E}) .$$

Da $\sigma(\mathcal{E})$ als σ-Algebra unter Komplementen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, folgt

$$\{3\} = \{1,2\}^c \in \sigma(\mathcal{E}) , \quad \{1\} = \{2,3\}^c \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad \{2\} = \{1,2\} \cap \{2,3\} \in \sigma(\mathcal{E}) .$$

Da jede Teilmenge A von $X = \{1,2,3\}$ eine Vereinigung von endlich vielen der vorigen Mengen ist, gilt $A \in \sigma(\mathcal{E})$. Also ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(X)$ die volle Potenzmenge von X.

Bemerkung 1.7 Im Beweis von Lemma 1.5 (b) haben wir die von einem Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ "von oben kommend" konstruiert, als den Durchschnitt einer gewissen Menge von σ-Algebren. Es ist im allgemeinen *nicht* möglich, $\sigma(\mathcal{E})$ (wie im vorigen Beispiel) in endlich oder abzählbar vielen Schritten "von unten kommend" aufzubauen, indem man alle Komplemente und abzählbaren Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{E}$ hinzunimmt und dann diesen Vorgang wieder und wieder wiederholt: Diese naive Vorstellung ist falsch![4]

[3] Damit meinen wir das folgende: 1. $\sigma(\mathcal{E})$ ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält; und 2.: ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$.

[4] Mittels "transfiniter Induktion" (einer raffinerten Beweismethode) lässt sich die Grundidee des von-unten-Aufbauens (in modifizierter Form!) retten, was dann sogar zusätzliche Information über $\sigma(\mathcal{E})$ liefert. Dies nur als Zukunftsmusik – solch fortgeschrittene Techniken haben wir hier nicht zur Verfügung!

1.2 Borelmengen

Dem $\mathbb{R}^n$ (und allgemeiner jedem metrischen Raum) kann man in natürlicher Weise eine σ-Algebra zuordnen, nämlich die von der Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O})$. Bevor wir diese diskutieren, sei an die Definition metrischer Räume und weitere Grundbegriffe erinnert:[5]

Definition 1.8 Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer *Metrik* d auf X, d.h. einer Funktion $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ mit den folgenden Eigenschaften:

M1 $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

M2 Symmetrie: Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

M3 Dreiecksungleichung: Für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Man stellt sich $d(x, y)$ als den Abstand der Punkte x und y vor.

1.9 Beispiele. (a) Der euklidische Abstand $d(x, y) := \|x - y\|_2$ macht $\mathbb{R}^n$ zu einem metrischen Raum. Wenn nichts anderes gesagt wird, versehen wir $\mathbb{R}^n$ stets mit dieser Metrik.

(b) Ist (X, d) ein metrischer Raum und Y eine Teilmenge, so ist die Einschränkung $d|_{Y \times Y}$ von d auf $Y \times Y$ eine Metrik auf Y, die sogenannte *induzierte Metrik*. Somit ist $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum.

(c) Durch Kombination von (a) und (b) können wir insbesondere jede Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ als metrischen Raum betrachten, versehen mit der vom euklidischen Abstand induzierten Metrik

$$Y \times Y \to [0, \infty[\quad (x, y) \mapsto \|x - y\|_2 .$$

Dies sind die metrischen Räume, die für unsere Zwecke wirklich von Bedeutung sind.

Definition 1.10 Ist (X, d) ein metrischer Raum, so nennt man eine Teilmenge $U \subseteq X$ *offen* (in X), wenn zu jedem $x \in U$ für ein $\varepsilon > 0$ die ganze *Kugel* $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ in U enthalten ist. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $A^c = X \setminus A$ offen ist.

1.11 Betrachten wir eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ als metrischen Raum mit der induzierten Metrik, so können wir von offenen Teilmengen von Y sprechen. Diese Mengen sind also im metrischen Raum Y offen, aber nicht notwendig in $\mathbb{R}^n$. Sie sind genau die Durchschnitte von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit der Menge Y (was wir uns in der Übung noch einmal klarmachen werden). In der Lehrbuchliteratur werden die offenen Teilmengen von Y gelegentlich auch als "relativ offene Mengen" bezeichnet.

Nun zurück zur Maßtheorie.

[5] Alles Nötige über metrische Räume finden Sie bei Bedarf in §1 und §2 von O. Forsters Analysis 2.

Definition 1.12 Ist (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die Menge der offenen Teilmengen von X, so heißt die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$ die *σ-Algebra der Borelmengen* auf X, und die Elemente $A \in \mathcal{B}(X)$ heißen *Borelmengen.*

Bemerkung 1.13 Es ist klar, dass alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen Borelmengen sind, ebenso abzählbare Durchschnitte offener Mengen (sogenannte *G_δ-Mengen*) und abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen (sogenannte *F_σ-Mengen*).

Versehen wir den Raum $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|_2$, so erhalten wir die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen von $\mathbb{R}^n$. Dies sind diejenigen Mengen, denen wir später ein Volumen zuordnen und über die wir integrieren werden. Wenn nichts anderes gesagt wird, versehen wir $\mathbb{R}^n$ stets mit der σ-Algebra der Borelmengen. Es ist nützlich, äquivalente Beschreibungen von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zur Verfügung zu haben.

Satz 1.14 *Jedes der folgenden Mengensysteme $\mathcal{E}_j$ erzeugt die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen von $\mathbb{R}$ (es ist also $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}_j)$):*

(a) $\mathcal{E}_1 := \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$;

(b) $\mathcal{E}_2 := \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;

(c) $\mathcal{E}_3 := \{[a, b[\colon a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;

(d) $\mathcal{E}_4 := \{[a, b] \colon a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;

(e) $\mathcal{E}_5 := \{]-\infty, b] \colon b \in \mathbb{R}\}$.

Beweis. Wegen $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ ist $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ (denn es ist $\sigma(\mathcal{E}_2)$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}_1$ enthält und somit $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$, siehe Fußnote zu Lemma 1.5 (b)). Aus

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \tfrac{1}{n}, b[$$

folgt $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$. Analog folgt aus

$$[a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \tfrac{1}{n}]\,,$$

dass $\mathcal{E}_3 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4)$; aus

$$[a, b] \ = \ ]-\infty, b] \setminus \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, a - \tfrac{1}{n}] \Big)$$

folgt $\mathcal{E}_4 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$ und somit $\sigma(\mathcal{E}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$. Wir haben also $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ erhalten und müssen noch $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ zeigen. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ von den offenen Mengen erzeugt wird, müssen wir zeigen, dass $\sigma(\mathcal{E}_1)$ jede offene Menge enthält. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann gibt es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq U$. Wir wählen $a \in]x-\varepsilon, x[\cap \mathbb{Q}$ und $b \in]x, x+\varepsilon[\cap \mathbb{Q}$. Dann ist $x \in]a,b[$, folglich

$$U = \bigcup_{]a,b[\subseteq U, a,b\in\mathbb{Q}}]a,b[.$$

Da die rechte Seite eine abzählbare Vereinigung ist, folgt $U \in \sigma(\mathcal{E}_1)$. □

Ein analoges Resultat gilt im $\mathbb{R}^n$. Definieren wir für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $a_k < b_k$ den *offenen Quader*

$$]a,b[:= \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_k < x_k < b_k \text{ für alle } k\}$$

und den *halboffenen Quader* $[a,b[:= \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k[$, so erhalten wir wie in Satz 1.14:

Lemma 1.15 *Die Menge $\mathcal{E} := \{\,]a,b[\, : \, a,b \in \mathbb{Q}^n$ mit $a_k < b_k\}$ aller offenen Quader mit rationalen Ecken erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Auch die Menge aller halboffenen Quader erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Der Beweis wird in der Übung geführt. □

Bemerkung 1.16 Man kann zeigen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine echte Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ist, es gibt also Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die keine Borelmengen sind. Dies ist leider nicht ganz einfach! Im wesentlichen gibt es zwei Beweismethoden.

(a) Methode 1. In einer späteren Übung werden wir uns (mit Anleitung) selbst überlegen, dass es auf der vollen Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ kein translationsinvariantes Maß[6] geben kann, das jedem Quader sein natürliches Volumen (das Produkt der Seitenlängen) zuordnet. Auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jedoch gibt es ein solches Maß, wie wir sehen werden (das Lebesgue-Borel-Maß). Somit muss $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sein.

(b) Die *zweite Beweismethode* können wir hier nur andeuten, da die benötigten Hilfsmittel unsere Möglichkeiten übersteigen. Man zeigt zunächst,[7] dass die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die gleiche Mächtigkeit besitzt wie die reellen Zahlen, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Die volle Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ hat jedoch aufgrund des Cantorschen Diagonalarguments eine echt größere Mächtigkeit als $\mathbb{R}^n$ (und somit als $\mathbb{R}$), d.h. es gibt eine injektive Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, aber keine injektive Abbildung in umgekehrter Richtung. Somit hat $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ eine echt größere Mächtigkeit als $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; die zwei Mengen können daher nicht zusammenfallen.

[6] D.h. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A + x$ haben stets das gleiche Maß.

[7] Man benutzt hierbei, dass nach Lemma 1.15 die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ von einer abzählbaren Menge $\mathcal{E}$ erzeugt wird. Die in der Fußnote zu Bemerkung 1.7 erwähnte Technik des "von-unten-Aufbauens" von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E})$ (durch transfinite Induktion bis zur ersten überabzählbaren Ordinalzahl) liefert eine obere Schranke für die Mächtigkeit der erzeugten σ-Algebra.

1.3 Messbare Funktionen

Wir wenden uns nun den Funktionen zu, die wir später integrieren wollen.

Definition 1.17 Es seien $(X_1, \mathcal{S}_1)$ und $(X_2, \mathcal{S}_2)$ Messräume. Eine Funktion $f\colon X_1 \to X_2$ heißt *messbar*, wenn das Urbild[8] jeder messbaren Menge messbar ist, d.h. $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$ für jede Menge $A \in \mathcal{S}_2$.

Man beachte die formale Ähnlichkeit dieser Definition zur Charakterisierung stetiger Funktionen durch die Eigenschaft, dass Urbilder offener Mengen offen sind (siehe §2, Satz 11 (b) in Forsters Analysis 2).

Notation. Wenn wir in der Situation von Definition 1.17 ganz klar machen wollen, dass die σ-Algebren $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ benutzt werden, schreiben wir auch $f : (X_1, \mathcal{S}_1) \to (X_2, \mathcal{S}_2)$ (obwohl natürlich f nach wie vor eine Funktion $X_1 \to X_2$ ist).

Wir diskutieren nun einige Beispiele messbarer Funktionen.

Beispiel 1.18 (Konstante Funktionen). *Sind $(X_1, \mathcal{S}_1)$ und $(X_2, \mathcal{S}_2)$ beliebige Messräume, so ist jede konstante Funktion $f\colon X_1 \to X_2$ messbar.*

Sei nämlich $f(x) = c$. Für $A \in \mathcal{S}_2$ gilt dann $f^{-1}(A) = X_1 \in \mathcal{S}_1$ (falls $c \in A$) oder $f^{-1}(A) = \emptyset \in \mathcal{S}_1$ (falls $c \notin A$).

Beispiel 1.19 (Funktionen mit zwei Werten). Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum. Wann ist eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit zwei Werten (etwa 0 und 1) messbar ? Dazu betrachten wir für jede Menge $A \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion*[9]

$$\mathbf{1}_A\colon X \to \mathbb{R}\,, \quad \mathbf{1}_A(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Diese Funktion ist genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{S}$, denn für verschiedene $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ durchläuft $\mathbf{1}_A^{-1}(B)$ die Menge $\{\emptyset,\, A,\, X \setminus A,\, X\}$.

Charakteristische Funktionen messbarer Mengen spielen in der Integrationstheorie eine wichtige Rolle. Wir schreiben gelegentlich auch $\mathbf{1}_A^X := \mathbf{1}_A$, wenn wir betonen wollen, dass $\mathbf{1}_A$ als Funktion auf X zu verstehen ist.

Beispiel 1.20 (Inklusionsabbildung). *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge und $j\colon Y \to X$, $j(x) := x$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $j\colon (Y, \mathcal{S}|_Y) \to (X, \mathcal{S})$ messbar, wobei $\mathcal{S}|_Y$ die Spur von $\mathcal{S}$ auf Y ist (wie in Definition* 1.4).

Für jede Teilmenge $A \in \mathcal{S}$ von X gilt nämlich offensichtlich

$$j^{-1}(A) \;=\; A \cap Y \;\in\; \mathcal{S}|_Y\,. \tag{4}$$

[8]Zur Erinnerung: $f^{-1}(A) := \{x \in X_1 \colon f(x) \in A\}$.

[9]In der Literatur bezeichnet man charakteristische Funktionen auch häufig mit χ_A.

Beispiel 1.21 (Messbare Funktionen in Teilmengen von Messräumen). *Es sei* $(X, \mathcal{S})$ *ein Messraum,* $Y \subseteq X$ *eine Teilmenge und* $j : Y \to X$, $j(x) := x$ *die Inklusionsabbildung. Ist auch* $(Z, \mathcal{T})$ *ein Messraum, so ist eine Abbildung* $f : Z \to Y$ *genau dann messbar als Abbildung nach* Y, *wenn sie als Abbildung nach* X *messbar ist. Genauer:* $f\colon (Z, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S}|_Y)$ *ist messbar genau dann, wenn* $j \circ f\colon (Z, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ *messbar ist.*

Für jede messbare Teilmenge $A \in \mathcal{S}$ von X gilt nach (4) nämlich

$$(j \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(j^{-1}(A)) = f^{-1}(A \cap Y)\,.$$

Da hier $B := A \cap Y$ die σ-Algebra $\mathcal{S}|_Y$ durchläuft, ist genau dann $(j \circ f)^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ für alle $A \in \mathcal{S}$ (also $j \circ f$ messbar), wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ für alle $B \in \mathcal{S}|_Y$ (wenn also f messbar ist).

Da die Definition messbarer Funktionen auf der Untersuchung von Urbildern beruht, ist es wichtig, sich die Eigenschaften von Urbildern klar zu machen. Ganz entscheidend ist, dass die Bildung von Urbildern mit den mengentheoretischen Operationen verträglich ist:

Lemma 1.22 (Operationentreue der Urbild-Abbildung) *Es sei* $f : X \to Y$ *eine Funktion. Dann gilt:*

(a) $f^{-1}(Y) = X$ *und* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(b) $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$ *für alle* $A, B \subseteq Y$, *insbesondere* $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$.

(c) *Ist* $(A_j)_{j \in J}$ *eine Familie von Teilmengen von* Y, *so gilt*

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j \in J} A_j\Big) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j) \quad \textit{und} \tag{5}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(A_j)\,. \tag{6}$$

Sind die Mengen A_j *paarweise disjunkt, so auch die Mengen* $f^{-1}(A_j)$.

Beweis. Wir zeigen beispielhaft Gleichung (5). Hierzu sei $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie von Teilmengen $A_j \subseteq Y$. Für $x \in X$ sind äquivalent:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\textstyle\bigcup_{j \in J} A_j) \;&\Leftrightarrow\; f(x) \in \textstyle\bigcup_{j \in J} A_j \;\Leftrightarrow\; (\exists j \in J)\;\; f(x) \in A_j \\ &\Leftrightarrow\; (\exists j \in J)\;\; x \in f^{-1}(A_j) \;\Leftrightarrow\; x \in \textstyle\bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j)\,. \end{aligned}$$

Also gilt (5). Die übrigen Behauptungen werden in der Übung bewiesen. □

Satz 1.23 *Kompositionen messbarer Funktionen sind messbar. Genauer: Sind* $(X_1, \mathcal{S}_1)$, $(X_2, \mathcal{S}_2)$ *und* $(X_3, \mathcal{S}_3)$ *Messräume und* $f\colon X_1 \to X_2$ *und* $g\colon X_2 \to X_3$ *messbare Funktionen, so ist auch* $g \circ f\colon X_1 \to X_3$ *messbar.*

Beweis. Für $A \in \mathcal{S}_3$ ist

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big) \in \mathcal{S}_1 \,,$$

da $g^{-1}(A) \in \mathcal{S}_2$ wegen der Messbarkeit von g und somit $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{S}_1$ wegen der Messbarkeit von f. Also ist $g \circ f$ messbar. □

Beispiel 1.24 *Ist $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{T})$ messbar und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist die Einschränkung $f|_Y\colon (Y, \mathcal{S}|_Y) \to (Z, \mathcal{T})$ messbar.* Begründung: $f|_Y = f \circ j$ ist die Komposition der messbaren Funktion f und der Inklusionsabbildung $j : Y \to X$, $j(x) := x$, die nach Beispiel 1.20 messbar ist. Nach Satz 1.23 ist somit $f|_Y$ messbar.

Der folgende Satz zeigt, dass es für das Überprüfen der Messbarkeit einer Funktion nicht erforderlich ist, die Urbilder *aller* messbaren Mengen zu betrachten.

Satz 1.25 *Es seien $(X_1, \mathcal{S}_1)$ und $(X_2, \mathcal{S}_2)$ Messräume und $f : X_1 \to X_2$ eine Funktion. Ist $\mathcal{S}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ für eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X_2)$ von Teilmengen von X_2, so ist f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$ für alle $A \in \mathcal{E}$.*

Beweis. Die Implikation "$\Rightarrow$" ist trivial. Sei nun $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$ für alle $A \in \mathcal{E}$; dann ist

$$\mathcal{E} \;\subseteq\; \{A \subseteq Y\colon f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1\} \;=:\; \mathcal{T} \,.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\mathcal{T}$ eine σ-Algebra ist; um z.B. **S3** für $\mathcal{T}$ nachweisen, sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{T}$. Dann ist $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}_1$ per Definition von $\mathcal{T}$ und somit auch

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \;\in\; \mathcal{S}_1 \,,$$

wobei die Operationentreue der Urbild-Abbildung benutzt wurde (Lemma 1.22 (c)). Also ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. Die Eigenschaften **S1** und **S2** überprüft man analog (Übung). Da $\mathcal{T}$ die Menge $\mathcal{E}$ enthält, enthält $\mathcal{T}$ auch die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_2$. Also gilt

$$\mathcal{S}_2 \;\subseteq\; \{A \subseteq X_2\colon f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1\}$$

und somit ist f messbar. □

Spezialfall: Ist (X_2, d) ein metrischer Raum, so ist f als Abbildung von $(X_1, \mathcal{S}_1)$ nach $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$ genau dann messbar, wenn das Urbild jeder offenen Menge in $\mathcal{S}_1$ ist.

Folgerung 1.26 *Sind X, Y metrische Räume, so ist jede stetige Funktion $f : X \to Y$ messbar (bzgl. der σ-Algebren $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$ der Borelmengen).*

Beweis. Wir wir gerade gesehen haben, genügt es zu zeigen, dass $f^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \subseteq Y$ eine Borelmenge ist. Dies aber ist klar: Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen, also erst recht eine Borelmenge. □

Folgerung 1.27 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *ist messbar.*

(b) *Die Urbilder aller offenen Intervalle sind messbar.*

(c) *Die Urbilder aller halboffenen Intervalle sind messbar.*

(d) *Die Urbilder aller abgeschlossenen Intervalle sind messbar.*

(e) *Für alle $b \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(]-\infty, b])$ messbar.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 1.14 und Lemma 1.25. □

Der nächste Beweis führt uns die Nützlichkeit von Folgerung 1.27 klar vor Augen. Ohne dieses Hilfsmittel hätte man wohl keine Chance!

Folgerung 1.28 *Jede monoton wachsende (oder fallende) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist messbar.*

Beweis. Da f monoton ist, ist das Urbild $f^{-1}(I)$ jedes offenen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und somit eine Borelmenge. Nach Folgerung 1.27 (b) ist f messbar. □

Lemma 1.15 liefert zu Folgerung 1.27 analoge Aussagen für Funktionen nach $\mathbb{R}^n$. Auch gilt:

Satz 1.29 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *ist messbar.*

(b) *Jede der Koordinatenfunktionen $f_k : X \to \mathbb{R}$ ist messbar als Funktion von $(X, \mathcal{S})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Beweis. (a)⇒(b): Die Koordinatenprojektionen $\mathrm{pr}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$ sind stetig und somit messbar nach Folgerung 1.26. Nach Satz 1.23 sind dann auch Funktionen $f_k = \mathrm{pr}_k \circ f$ messbar.

(b)⇒(a): Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Sind alle Koordinatenfunktionen $f_j : X \to \mathbb{R}$ messbar, so ist für jeden offenen Quader $]a, b[= \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[$ in $\mathbb{R}^n$ das Urbild

$$f^{-1}(]a, b[) \;=\; \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(]a_k, b_k[)$$

messbar. Da die Menge aller offenen Quader $]a, b[$ nach Lemma 1.15 die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen erzeugt, ist f nach Satz 1.25 messbar. □

Hier ist eine sehr wichtige Anwendung:

Satz 1.30 *Es sei* $(X, \mathcal{S})$ *ein Messraum und* $f, g : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *messbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen* $f + g$*,* fg*,* $|f|$*,* $\max(f, g)$*,* $\min(f, g) : X \to \mathbb{R}$ *messbar.*[10]

Beweis. Die Betragsfunktion $|.|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und somit messbar nach Folgerung 1.26. Also ist $|f| = |.| \circ f$ messbar als Komposition messbarer Funktionen (Satz 1.23). Aus Satz 1.29 wissen wir, dass die Funktion

$$F \; := \; (f, g) : \; X \to \mathbb{R}^2$$

mit den Komponenten f und g messbar ist. Weiter ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

stetig und somit messbar und daher $f + g = h \circ F$ messbar als Komposition messbarer Funktionen. Die restlichen Behauptungen folgen analog in Anbetracht der Stetigkeit der Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die (x, y) auf xy, $\max(x, y)$ bzw. $\min(x, y)$ abbilden. □

Da konstante Funktionen messbar sind, bilden also die messbaren Funktionen $X \to \mathbb{R}$ insbesondere einen reellen Vektorraum.

Es ist nützlich, die Überlegung aus dem Beweis von Satz 1.25 als Lemma festzuhalten:

Lemma 1.31 *Ist* $f\colon X \to Y$ *eine Funktion und* $\mathcal{S}$ *eine* σ*-Algebra auf* X*, so ist*

$$f_*(\mathcal{S}) \; := \; \{A \subseteq Y\colon f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\} \tag{7}$$

eine σ*-Algebra auf* Y*.* □

Man nennt $f_*(\mathcal{S})$ das *direkte Bild* von $\mathcal{S}$ unter f. Beachten Sie, dass für $A \in f_*(\mathcal{S})$ per Definition $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$. Also ist $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (Y, f_*(\mathcal{S}))$ messbar.

1.4 Hilfsmittel zum Prüfen der Messbarkeit von Funktionen

In diesem Abschnitt entwickeln wir einige weitere Resultate, die beim Überprüfen der Messbarkeit von Funktionen sehr von Nutzen sein können. Wie etwa würden Sie begründen, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) \; := \; \begin{cases} \;\;0 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

messbar ist ? Man könnte dies zwar von Hand schaffen, aber es ist doch sehr bequem, allgemeine Hilfsmittel zur Diskussion solcher stückweise definierten Funktionen zur Verfügung zu haben. Diese Hilfsmittel werden nun bereitgestellt.

Zunächst schauen wir uns an, wie die Borelmengen eines metrischen Raums und die Borelmengen eines Unterraums zueinander in Beziehung stehen.

[10] Diese Funktionen sind punktweise definiert, es ist also z.B. $\max(f, g)(x) := \max\big(f(x), g(x)\big)$.

Satz 1.32 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die wir mit der induzierten Metrik $d_Y := d|_{Y \times Y}$ versehen. Dann ist die σ-Algebra der Borelmengen von (Y, d_Y) gleich der Spur von $\mathcal{B}(X)$ auf Y, also*

$$\mathcal{B}(Y) \;=\; \mathcal{B}(X)|_Y \;=\; \{Y \cap A \colon A \in \mathcal{B}(X)\}\,.$$

Gilt $Y \in \mathcal{B}(X)$ (wenn also z.B. $Y \subseteq X$ offen ist oder abgeschlossen), so ist folglich $\mathcal{B}(Y) = \{A \in \mathcal{B}(X) \colon A \subseteq Y\} \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Als Hilfsmittel für den Beweis führen wir eine Notation ein.

Definition 1.33 Ist $f \colon X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Menge von Teilmengen von Y, so schreiben wir

$$f^{-1}[\mathcal{E}] \;:=\; \{f^{-1}(A) \colon A \in \mathcal{E}\}$$

für die Menge aller Urbilder der Mengen aus $\mathcal{E}$.

Lemma 1.34 *Es sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf Y, so ist $f^{-1}[\mathcal{S}]$ eine σ-Algebra auf X, somit $(X, f^{-1}[\mathcal{S}])$ ein Messraum. Die Abbildung $f \colon (X, f^{-1}[\mathcal{S}]) \to (Y, \mathcal{S})$ ist messbar.*

(b) *Für die von einer Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ gilt:*

$$f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})] = \sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])\,.$$

Beweis. (a) werden Sie selbst in der Übung überprüfen.

(b) Da $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, ist auch $f^{-1}[\mathcal{E}] \subseteq f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})]$. Weil $f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})]$ nach Teil (a) eine σ-Algebra ist, folgt

$$\sigma(f^{-1}[\mathcal{E}]) \;\subseteq\; f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})]\,. \tag{9}$$

Andererseits ist nach Lemma 1.31 $\mathcal{T} := f_*(\sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])) = \{A \subseteq Y \colon f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])\}$ eine σ-Algebra auf Y. Diese enthält $\mathcal{E}$, da $f^{-1}(E) \in f^{-1}[\mathcal{E}] \subseteq \sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Somit ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{T}$ und daher

$$f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})] \subseteq f^{-1}[\mathcal{T}]\,. \tag{10}$$

Für $A \in \mathcal{T}$ gilt aber $f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])$ per Definition von $\mathcal{T}$. Also $f^{-1}[\mathcal{T}] \subseteq \sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])$ und somit $f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})] \subseteq \sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])$ wegen (10). Mit (9) liefert dies $f^{-1}[\sigma(\mathcal{E})] = \sigma(f^{-1}[\mathcal{E}])$. □

Beispiel 1.35 Ist $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist $\mathcal{S}|_Y = j^{-1}[\mathcal{S}]$, wobei $j \colon Y \to X$, $j(x) := x$ die Inklusion ist (denn es ist $j^{-1}(A) = A \cap Y$ für $A \subseteq X$).

Somit erhalten wir als Spezialfall von Lemma 1.34 (b):

Ist X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X, so gilt für die Spur von $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$:

$$\sigma(\mathcal{E})|_Y \;=\; \sigma\big(\{E \cap Y \colon E \in \mathcal{E}\}\big)\,.$$

Beweis: Es sei $j\colon Y \to X$ die Inklusion. Nach Beispiel 1.35 und Lemma 1.34 (b) ist dann

$$\sigma(\mathcal{E})|_Y \;=\; j^{-1}[\sigma(\mathcal{E})] \;=\; \sigma(j^{-1}[\mathcal{E}]) \;=\; \sigma(\{j^{-1}(E)\colon E \in \mathcal{E}\}) \;=\; \sigma(\{E \cap Y \colon E \in \mathcal{E}\})\,.$$

Beweis von Satz 1.32. Es sei $\mathcal{O}_X$ die Menge aller offenen Teilmengen von X, $\mathcal{O}_Y$ die Menge aller offenen Teilmengen des metrischen Raums (Y, d_Y). In **1.11** haben wir daran erinnert, dass $\mathcal{O}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}_X\}$ (siehe auch Aufgabe H4). Nach dem gerade diskutierten Spezialfall von Lemma 1.34 (b) ist folglich

$$\mathcal{B}(X)|_Y \;=\; \sigma(\mathcal{O}_X)|_Y \;=\; \sigma\big(\{U \cap Y \colon U \in \mathcal{O}_X\}\big) \;=\; \sigma(\mathcal{O}_Y) \;=\; \mathcal{B}(Y)\,. \qquad \square$$

Der folgende Satz ermöglicht es in vielen Fällen, für *stückweise definierte* Funktionen deren Messbarkeit nachzuweisen.

Satz 1.36 (Stückweise messbare Funktionen sind messbar). *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Mengen $X_n \in \mathcal{S}$, welche X überdecken, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Dann gilt:*

(a) *Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann messbar, wenn $A \cap X_n$ für jedes n messbar ist.*

(b) *Ist $f\colon X \to Y$ eine Funktion in einen Messraum $(Y, \mathcal{T})$, so ist f messbar genau dann, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|_{X_n}\colon (X_n, \mathcal{S}|_{X_n}) \to (Y, \mathcal{T})$ messbar ist.*

Beweis. (a) verifizieren Sie selbst in der Übung.

(b) Ist f messbar, so ist auch die Einschränkung $f|_{X_n}\colon (X_n, \mathcal{S}|_{X_n}) \to (Y, \mathcal{T})$ messbar, nach Beispiel 1.24. Sei nun umgekehrt $f|_{X_n}$ messbar für jedes n. Für jede messbare Teilmenge $A \in \mathcal{T}$ von Y ist

$$f^{-1}(A) \;= X \cap f^{-1}(A) = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n) \cap f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(X_n \cap f^{-1}(A)\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f|_{X_n})^{-1}(A)$$

messbar als abzählbare Vereinigung der messbaren Mengen $(f|_{X_n})^{-1}(A) \in \mathcal{S}|_{X_n} = \{B \in \mathcal{S}\colon B \subseteq X_n\} \subseteq \mathcal{S}$ (unter Benutzung von $X_n \in \mathcal{S}$). Also ist f messbar. $\square$

Zur Illustration diskutieren wir nun die in (8) zu Beginn des Abschnitts beschriebene, stückweise definierte Funktion.

Beispiel 1.37 Die Funktion

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \cos(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist messbar als Abbildung $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, denn die Borelmengen $X_1 :=]-\infty, 0[$ und $X_2 := [0, \infty[$ $(=: X_n$ für $n \geq 3)$ bilden eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ derart, dass $f|_{X_n}$ stetig und somit messbar ist.

Im Detail gehen hier die vorigen Resultate wie folgt ein: Als stetige Funktion ist $f|_{X_n}$ messbar als Abbildung $(X_n, \mathcal{B}(X_n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (siehe Folgerung 1.26). Nach Satz 1.32 ist hier $\mathcal{B}(X_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_n}$. Also ist nach Satz 1.36 (b) die Abbildung f messbar.

In §1.6 werden wir weitere mächtige Hilfsmittel zum Prüfen der Messbarkeit von Funktionen kennenlernen, insbesondere Satz 1.48 über die Messbarkeit punktweiser Grenzwerte.

1.5 Messbare Funktionen in die erweiterte Zahlengerade

Es ist oft praktisch, statt mit reellwertigen Funktionen mit Funktionen zu arbeiten, deren Werte in der **erweiterten Zahlengeraden** $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ liegen.[11] Wir versehen nun $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer σ-Algebra und diskutieren die messbaren $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen Funktionen.

1.38 Wir setzen
$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \; := \; \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \colon A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\,; \tag{11}$$
es ist nicht schwer zu sehen, dass dies eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist (wir zeigen dies in Satz 1.39 (a) mit allgemeinen Argumenten, es geht aber auch per Hand durch Nachprüfen von **S1**–**S3**).[12]

Satz 1.39 $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Es gilt* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = j_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *wobei* $j \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $j(x) := x$ *die Inklusion ist. Insbesondere ist* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *eine* σ*-Algebra.*

(b) *Es ist* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}}$ *gleich der Spur von* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *auf* $\mathbb{R}$, *wobei* $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

(c) *Eine Teilmenge* $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *gehört genau dann zu* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, *wenn Mengen* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *und* $C \subseteq \{-\infty, \infty\}$ *existieren mit* $A = B \cup C$.

(d) *Eine Abbildung* $f \colon (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *mit Bild in* $\mathbb{R}$ *ist genau dann messbar, wenn sie als Abbildung nach* $\mathbb{R}$ *messbar ist, wenn also die Ko-Einschränkung* $f|^{\mathbb{R}} \colon (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *messbar ist.*

Beweis. (a) Gegeben $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist $j^{-1}(A) = A \cap \mathbb{R}$. Somit $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \colon A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ $= \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \colon j^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = j_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(b) Für $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ per Definition von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Also $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ist umgekehrt $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gegeben, so ist A eine Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ mit $A \cap \mathbb{R} = A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und somit $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Also $A = A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}}$.

[11] Hierbei sind ∞ und $-\infty$ zwei beliebige, fest gewählte Elemente, die nicht bereits in $\mathbb{R}$ liegen.

[12] Wir schreiben suggestiv "$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$," da $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ tatsächlich die Borelsche σ-Algebra für eine geeignete Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist. Diese Tatsache spielt für uns jedoch keine Rolle, und wir nehmen einfach (11) als Definition.

(c) Ist $A = B \cup C$ wie beschrieben, so ist $A \cap \mathbb{R} = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und somit $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Ist umgekehrt $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, so ist $A = B \cup C$ mit $B := A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $C := A \cap \{-\infty, \infty\}$.

(d) ist wegen (b) ein Spezialfall von Beispiel 1.21. □

Wir setzen nun die übliche Ordnung auf $\mathbb{R}$ zu einer Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort, indem wir erklären:

$$-\infty \;\leq\; x \;\leq\; \infty \qquad \text{für alle } x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Wir definieren Intervalle $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[\; \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ auf die offensichtliche Art. Jedes dieser Intervalle ist Element von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, denn sein Schnitt mit $\mathbb{R}$ ist ein Intervall in $\mathbb{R}$ und somit in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Lemma 1.40 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist messbar.*

(b) *$-f : (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist messbar.*

(c) *Für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ist die Menge $\{x \in X : f(x) \leq b\}$ messbar.*

(d) *Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) > a\}$ messbar.*

(e) *Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ messbar.*

(f) *Für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) < b\}$ messbar.*

Beweis. (a)⇔(c): Die Menge $\mathcal{E}$ aller Intervalle $[-\infty, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$ erzeugt eine σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ auf $\overline{\mathbb{R}}$. Wir zeigen nun, dass $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$; mit Satz 1.25 folgt hieraus, dass f genau dann messbar ist, wenn $f^{-1}([-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{S}$ für alle $b \in \mathbb{R}$. Also sind (a) und (c) äquivalent.[13] Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Offensichtlich enthält $\sigma(\mathcal{E})$ jede der Mengen $\{-\infty\}$, $\{\infty\}$ sowie $\mathbb{R}$. Sei $j : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ die Inklusion. Für die Spur von $\sigma(\mathcal{E})$ auf $\mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E})|_{\mathbb{R}} &= \sigma(\{\mathbb{R} \cap A : A \in \mathcal{E}\}) \;=\; \sigma(\{[-\infty, b] \cap \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{\,]-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}) \;=\; \mathcal{B}(\mathbb{R})\,, \end{aligned}$$

wobei das erste Gleichheitszeichen auf dem in Beispiel 1.35 diskutierten Spezialfall von Lemma 1.34 (b) beruht, das letzte auf Satz 1.14 (e). Wegen $\mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E})$ ist also $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})|_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ (siehe Ende von Beispiel 1.3 (d)). Da jede Menge $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ Vereinigung einer Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ und einer Menge $C \in \big\{\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}\big\} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ist, erhalten wir $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Somit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, wie behauptet.

Die Äquivalenzen (a)⇔(d), (a)⇔(e) und (a)⇔(f) zeigt man analog.

(a)⇔(b): Da $(-f)^{-1}([-\infty, b]) = f^{-1}([-b, \infty])$, ist (c) für $-f$ äquivalent zu (e) für f. Da (b) nach dem bereits Gezeigten zu (c) mit $-f$ statt f äquivalent ist und (a) zu (e), sind auch (a) und (b) äquivalent. □

[13] Für $b = \infty$ ist $f^{-1}([-\infty, b]) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = X$ immer messbar, ebenso für $b = -\infty$.

1.6 Messbarkeit punktweiser Limites, Suprema und Infima

Die folgenden Resultate zeigen, dass Messbarkeit bemerkenswert stabil gegenüber Grenzprozessen ist. Insbesondere werden wir sehen, dass punktweise Limites $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger messbarer Funktionen immer messbar sind, was später sehr nützlich sein wird.

Wir benötigen nun Grenzwerte sowie Suprema und Infima in $\overline{\mathbb{R}}$. Diese sind genau das, was man erwarten würde. Der Vollständigkeit halber geben wir dennoch die genauen Definitionen und beweisen einige elementare Sachverhalte.

Definition 1.41 **(Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$).** (a) Wir nennen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergent und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq N$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\mathbb{R}$.

(b) Wie üblich schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), falls es zu jedem $r \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $a_n \geq r$ (bzw. $a_n \leq r$) für alle $n \geq N$.

Man könnte zeigen, dass für eine geeignete Metrik d auf $\overline{\mathbb{R}}$ die konvergenten Folgen und Grenzwerte im metrischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ genau die gerade *ad hoc* definierten konvergenten Folgen und Grenzwerte sind. Dies ist für unsere Zwecke jedoch ohne Belang.

Lemma 1.42 *Jede monoton wachsende (oder monoton fallende) Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ ist konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Ist $a_n = -\infty$ für alle n oder $a_n = \infty$ für alle genügend großen n, so konvergiert a_n offensichtlich gegen $-\infty$ (bzw. ∞). Andernfalls gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \geq \mathbb{N}$. Ist $(a_n)_{n\geq N}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ (nach Forster I, §5, Satz 5) und somit in $\overline{\mathbb{R}}$. Andernfalls gilt offensichtlich $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Monoton fallende Folgen diskutiert man analog. □

Zur Erinnerung: Ist $(X, \leq)$ eine geordnete Menge und $A \subseteq X$, so nennt man ein Element $s \in X$ eine *obere Schranke* für A, wenn $a \leq s$ für alle $a \in A$. Ist s_0 eine obere Schranke für A und $s_0 \leq s$ für jede obere Schranke s von A, so nennt man s_0 die *kleinste obere Schranke* oder das *Supremum* von A und schreibt $\sup(A) := s_0$. Das Supremum ist eindeutig, falls es existiert. Analog definiert man untere Schranken und das Infimum als größte untere Schranke. Folgendes Lemma verifizieren wir in der Übung:

Lemma 1.43 *Jede Teilmenge $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ besitzt ein Infimum und ein Supremum in $\overline{\mathbb{R}}$.* □

Definition 1.44 Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$, so ist die Folge $\big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ offensichtlich monoton fallend; nach Lemma 1.42 existiert daher der Grenzwert

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{a_k\colon k \geq n\}\Big)$$

in $\overline{\mathbb{R}}$. Analog definieren wir $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \Big(\inf\{a_k\colon k \geq n\}\Big) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Wir machen uns nun einige Beziehungen zwischen Limites, Suprema und Infima klar.

Lemma 1.45 *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:*

(a) *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(b) *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(c) *Es ist $\limsup a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big)$ und $\liminf a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf\{a_k : k \geq n\}\big)$.*

(d) *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\overline{\mathbb{R}}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Beweis. Übung. □

Die folgende Tatsache brauchen wir zunächst nicht; der Beweis wird daher erst später einmal in der Übung geführt.

Lemma 1.46 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert genau dann, wenn*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \textit{in } \overline{\mathbb{R}}.$$ □

Nun kommen wir zu den für die Maß- und Integrationstheorie wichtigen Resultaten.

Satz 1.47 *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Dann sind auch die Funktionen*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n \quad \textit{und} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

messbar.

Beweis. Es sei $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, d.h., für alle $x \in X$ ist $g(x) := \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Für alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist dann

$$\{x \in X : g(x) > a\} \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > a\}\,.$$

Nach Voraussetzung und Lemma 1.40 (d) ist die rechte Seite messbar. Also ist für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ die linke Seite messbar, und somit ist g messbar nach Lemma 1.40 (d). Die Messbarkeit von $\inf f_n$ zeigt man analog. Aus

$$\limsup_{n\to\infty} f_n \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geq n} f_k\Big)$$

folgt nun die Messbarkeit von $\limsup f_n$, und die von $\liminf f_n$ zeigt man entsprechend. □

Satz 1.48 *Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar. Genauer: Ist $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : (X, \mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ derart, dass der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$ existiert, so ist die Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

Beweis. Da $f = \limsup f_n$ nach Lemma 1.45 (d), folgt die Behauptung aus Satz 1.47. □

2 Maße

Wir wenden uns nun dem Messen der messbaren Mengen eines Messraums zu und beginnen mit einer Axiomatisierung des Maßbegriffs.

2.1 Definition und elementare Eigenschaften von Maßen

Definition 2.1 Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum. Ein *Maß* auf $(X, \mathcal{S})$ ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) μ ist *σ-additiv*, d.h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{S}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,. \tag{12}$$

Ist μ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$, so nennen wir das Tripel $(X, \mathcal{S}, \mu)$ einen *Maßraum*.

Im folgenden haben wir hin und wieder (wie auch schon in (12)) mit ∞ und $-\infty$ zu rechnen. Dies geschieht nach folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
&0 \cdot (\pm\infty) \;=\; (\pm\infty) \cdot 0 \;:=\; 0\,; && \\
&x \cdot (\pm\infty) \;=\; (\pm\infty) \cdot x \;:=\; \pm\infty && \text{für } x \in \,]0, \infty]\,; \\
&x \cdot (\pm\infty) \;=\; (\pm\infty) \cdot x \;:=\; \mp\infty && \text{für } x \in [-\infty, 0[\,; \\
&x + \infty \;=\; \infty + x \;:=\; \infty && \text{für } x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\,; \\
&x + (-\infty) \;=\; (-\infty) + x \;:=\; -\infty && \text{für } x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir die Ausdrücke $(-\infty) + \infty$ und $\infty + (-\infty)$ undefiniert lassen. Die obige Konvention $0 \cdot \infty := 0$ ist im Rahmen der Maßtheorie üblich und sinnvoll.

Der Limes der Reihe auf der rechten Seite von (12) ist als Limes in $\overline{\mathbb{R}}$ zu verstehen, wie in Definition 1.41.

Bemerkung 2.2 Ist $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ eine σ-additive Funktion auf einer σ-Algebra $\mathcal{S}$ mit $\mu(\emptyset) \neq 0$, so gilt $\mu(A) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$ (Übung). Bedingung (a) in der Maßdefinition schließt diese Pathologie aus.

Wir geben nun einige Beispiele von Maßen an; in der Übung werden wir nachprüfen, dass die Maßeigenschaften wirklich erfüllt sind. In den Beispielen ist jeweils X eine beliebige Menge.

2.3 Beispiele für Maße.

(a) Ist $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} := \{\emptyset, X\}$, so kann $\mu(X) \in [0, \infty]$ beliebig gewählt werden, und man erhält mit $\mu(\emptyset) := 0$ ein Maß.

(b) Es sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ wird durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{wenn } x \notin A \end{cases}$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ definiert, das sogenannte *Punkt-* oder *Diracmaß in* x. Man schreibt $\delta_x := \mu$.

(c) Gegeben $E \subseteq X$ sei $\zeta(E) := |E|$ die Anzahl der Elemente von E, falls E eine endliche Menge ist, andernfalls $\zeta(E) := \infty$. Auf diese Weise erhalten wir ein Maß ζ auf $(X, \mathcal{P}(X))$, das sogenannte *Zählmaß*.

(d) Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{S}$, so ist auch $(Y, \mathcal{S}|_Y, \mu|_Y)$ ein Maßraum, wobei $\mu|_Y := \mu|_{\mathcal{S}|_Y}$ die Einschränkung der Funktion μ auf die Spur $\mathcal{S}|_Y$ von $\mathcal{S}$ auf Y ist.

(e) Ist μ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$ und $c \in [0, \infty]$, so ist auch $c\mu \colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$, $A \mapsto c\mu(A)$ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$.

(f) Ist $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(X, \mathcal{S})$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n : \mathcal{S} \to [0, \infty]$, $A \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$. Dies zeigen wir allerdings erst später, sobald wir den Doppelreihensatz (Folgerung 3.27) zur Verfügung haben.

Lemma 2.4 *Es sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum. Dann gilt:*

(a) μ *ist* **additiv**, *d.h.* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ *für alle* $A, B \in \mathcal{S}$ *mit* $A \cap B = \emptyset$.

(b) μ *ist* **monoton**, *d.h.* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *für alle* $A, B \in \mathcal{S}$ *mit* $A \subseteq B$.

(c) *Ist* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ *eine aufsteigende Folge von Mengen* $A_n \in \mathcal{S}$, *so gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)\,.$$

(d) *Ist* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ *eine absteigende Folge von Mengen* $A_n \in \mathcal{S}$ *mit* $\mu(A_1) < \infty$, *so ist*

$$\mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)\,.$$

(e) *Für beliebige Folgen* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *nicht notwendig disjunkter Mengen* $A_n \in \mathcal{S}$ *ist*

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Beweis. (a) Man wendet die σ-Additivität auf die Folge $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$ an.

(b) Aus (a) folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(c) Es sei $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir setzen $B_1 := A_1$ und $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ für $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Dann ist $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, wobei die Mengen B_n paarweise disjunkt sind. Aus der σ-Additivität von μ folgt

$$\mu(B) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)\,. \tag{13}$$

Nun ist $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ und somit $\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$ wegen (a). Mit (13) folgt nun $\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \to \mu(B)$.

(d) Es sei $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $C_n := A_1 \setminus A_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Teil (a) ist $\mu(A_1) = \mu(A_n) + \mu(C_n)$; da $\mu(A_1) < \infty$ und somit auch $\mu(A_n) < \infty$ und $\mu(C_n) < \infty$, können wir $\mu(C_n)$ subtrahieren und erhalten

$$\mu(A_n) \;=\; \mu(A_1) - \mu(C_n)\,. \tag{14}$$

Die Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist aufsteigend, mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = A_1 \setminus A$. Nach (c) gilt also $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(A_1 \setminus A) < \infty$. Formel (14) zeigt nun, dass $\mu(A_n) \to \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A)$.

(e) Wir setzen $B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$. Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (wegen (b)). Folglich ist $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. $\square$

Es ist ganz wesentlich, dass in Lemma 2.4 (d) $\mu(A_1) < \infty$ verlangt wird. In den Übungen werden wir Beispiele messbarer Mengen $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ kennenlernen mit $\mu(A_n) = \infty$ für alle n aber $\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 0$.

2.2 Das Lebesgue-Borel-Maß

Der folgende Satz behauptet, dass es genau ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gibt, das allen achsenparallelen Quadern ihr (gewöhnliches) Volumen zuordnet. Dieses Maß, das Lebesgue-Borel-Maß λ_n, ist das wichtigste Maß für die Zwecke der Analysis, und wir werden es ständig benutzen. Trotz der fundamentalen Bedeutung des Lebesgue-Borel-Maßes müssen wir den Beweis seiner Existenz in der Vorlesung aus Zeitgründen leider übergehen. Interessierte finden den Beweis in einem nicht prüfungsrelevanten Anhang zum Skript.[14] Ich empfehle Ihnen, den Sachverhalt für den Augenblick hinzunehmen und den Beweis erst später einmal nachzulesen, wenn Sie etwas mehr Vertrautheit mit maßtheoretischen Denkweisen gewonnen haben (am besten erst nach Kapitel 5, wo die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes bewiesen wird).

[14] Der im Anhang gegebene Beweis orientiert sich an Bauers "Maß- und Integrationstheorie." Eine andere Konstruktionsmethode für Maße ('Rieszscher Darstellungssatz") findet man in Rudins "Real and Complex Analysis;" sie verlangt tiefere Kenntnisse der Topologie.

Satz 2.5 (Existenz und Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes).

(a) *Es gibt genau ein Maß* λ *auf der* σ*-Algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *der Borelmengen des* $\mathbb{R}^n$*, welches jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet, also*

$$\lambda\big([a,b[\big) \;=\; (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

für alle $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *mit* $a_k \leq b_k$ *für alle* k.

(b) *Ist* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene Teilmenge und* μ *ein Maß auf* $\mathcal{B}(U)$*, das auf allen kompakten Mengen* $K \subseteq U$ *endliche Werte annimmt, so ist für jede Borelmenge* $A \in \mathcal{B}(U)$

$$\mu(A) \;=\; \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \colon B_k \text{ halboffene Quader in } U \text{ mit } A \subseteq \textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \Big\}\,.$$

Insbesondere ist das Maß μ *also durch seine Werte auf den halboffenen Quadern eindeutig bestimmt.*

Beweisskizze: Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten, halboffenen Quadern.[15] Dann ist $\mathcal{F}$ ein *Mengenring* im folgenden Sinn: $\emptyset \in \mathcal{F}$, und mit $A, B \in \mathcal{F}$ sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ in $\mathcal{F}$. Außerdem wird $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ als σ-Algebra von $\mathcal{F}$ erzeugt (vgl. Lemma 1.15).

Für $[a,b[\,\in \mathcal{F}$ setzen wir $\lambda([a,b[) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$, definieren $\lambda(\emptyset) := 0$ und erklären für paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_r$

$$\lambda(Q_1 \cup \cdots \cup Q_r) \;:=\; \sum_{k=1}^{r} \lambda(Q_k)\,.$$

Auf diese Weise erhält man eine wohldefinierte Abbildung $\lambda \colon \mathcal{F} \to [0, \infty[$, die offensichtlich additiv ist. Man zeigt nun, dass λ sogar σ-additiv ist (dies beruht auf der Kompaktheit der entsprechenden abgeschlossenen Quader). Schließlich beweist und benutzt man den *Hahnschen Fortsetzungssatz*, der die eindeutige Fortsetzung von λ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ liefert. □

Definition 2.6 Das Maß $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ aus Satz 2.5 heißt das *n-dimensionale Lebesgue-Borel Maß*. Man schreibt auch $\lambda_n := \lambda$.

Wir denken uns $\lambda_n(B)$ als n-dimensionales Volumen der Borelmenge B. Dieses Volumen ist dadurch normiert, dass wir jedem (achsenparallelen) Quader sein "natürliches" Volumen zuordnen. Bei "komplizierten" Borelmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$, die sich nicht als disjunkte Vereinigungen solcher Quader darstellen lassen, ist zunächst nicht klar, wie man die Zahl $\lambda(B)$ konkret berechnen kann. Satz 2.5 (b) sagt uns hierzu lediglich, dass man $\lambda(B)$ von oben

[15] Solche Vereinigungen heißen auch "n-dimensionale Figuren"—daher der Buchstabe $\mathcal{F}$.

beliebig genau approximieren kann, wenn man Überdeckungen von B durch abzählbar viele Quader betrachtet. Man erwartet, dass man umso mehr und umso kleinere Quader zur Überdeckung benutzen muss, je "komplizierter" B ist. Dieses Verfahren ist allerdings nicht wirklich praktikabel. Mit dem *Prinzip von Cavalieri* werden wir bald ein Werkzeug kennen lernen, mit dem man die Berechnung von Volumina auf die Berechnung eindimensionaler Integrale zurückführen kann, wo uns die Mittel der Differential- und Integralrechnung zur Integralberechnung zur Verfügung stehen.

Wir schließen das Kapitel mit drei Folgerungen aus Satz 2.5 ab.

Folgerung 2.7 *Für jeden kompakten Quader* $[a,b] := \prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $a_k \leq b_k$ *gilt*

$$\lambda([a,b]) \;=\; (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)\,.$$

Beweis. Für $k = 1, \ldots, n$ und $m \in \mathbb{N}$ sei $b_k^{(m)} := b_k + \frac{1}{m}$ und $b^{(m)} := (b_1^{(m)}, \ldots, b_n^{(m)})$. Dann gilt $[a,b] = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} [a, b^{(m)}[$, wobei

$$[a, b^{(m)}[\;\supseteq\; [a, b^{(m+1)}[\qquad \text{für alle } \; m \in \mathbb{N}.$$

Lemma 2.4 (d) gibt $\lambda([a,b]) = \lim_{m\to\infty} \lambda([a, b^{(m)}[) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \bigl(b_k + \frac{1}{m} - a_k\bigr) = \prod_{k=1}^{n} \bigl(b_k - a_k\bigr)$. □

Folgerung 2.8 (Translationsinvarianz der Lebesgue-Borel-Maßes). *Ist* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$, *so ist auch* $A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *und es gilt*

$$\lambda(A + x) \;=\; \lambda(A)\,.$$

Hierbei ist $A + x := \{a + x \colon a \in A\}$.

Beweis. Den Beweis führen wir in der Übung. □

Folgerung 2.9 (Verhalten unter Homothetien). *Ist* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *und* $t \in \,]0, \infty[$, *so ist auch* $tA \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *und es gilt*

$$\lambda(tA) \;=\; t^n \lambda(A)\,.$$

Hierbei ist $tA := \{ta \colon a \in A\}$.

Beweis. Man überprüft leicht, dass $t\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \{tA \colon A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ ist, die alle offenen Mengen enthält. Folglich ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq t\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Eine Wiederholung dieser Überlegung liefert

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;\subseteq\; t\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;\subseteq\; \frac{1}{t}\, t\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;=\; \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,;$$

also gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = t\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Somit macht

$$\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]\,, \qquad \mu(A) := \frac{1}{t^n}\lambda(tA)$$

Sinn. Man bestätigt leicht, dass μ ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ist und dass

$$\mu([a,b[) \;=\; \frac{1}{t^n}\lambda(t[a,b[) \;=\; \frac{1}{t^n}\lambda([ta,tb[) \;=\; \frac{1}{t^n}\prod_{k=1}^{n}(tb_k - ta_k) \;=\; \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \;=\; \lambda([a,b[)$$

für jeden halboffenen Quader $[a,b[\subseteq \mathbb{R}^n$. Mit Satz 2.5 (b) folgt $\lambda = \mu$ auf ganz $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Da die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := tx$ ein Homöomorphismus ist (also eine stetige Bijektion mit stetiger Umkehrabbildung, $x \mapsto t^{-1}x$), hätten wir hier übrigens

$$t\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;=\; f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \;=\; \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

auch als Spezialfall von Aufgabe H11 (c) erhalten können.

Teil II: Allgemeine Integrationstheorie

In diesem Kapitel ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum; $\overline{\mathbb{R}}$ ist stets versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ (z.B. $[0, \infty]$) mit der Spur von $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Unser Ziel ist es, messbare Funktionen $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu integrieren. Das Maß μ wird uns vorgeben, was das Integral der charakteristischen Funktion einer messbaren Menge sein soll. Davon ausgehend definieren wir das Integral von messbaren Funktionen mit nur endlich vielen Werten (Stufenfunktionen) und dann das Integral nicht-negativer messbarer Funktionen, die wir von unten durch Stufenfunktionen annähern. Schließlich spalten wir allgemeine messbare Funktionen in ihren Positiv- und Negativteil auf, für die wir die Integrale bereits definiert haben. Wir werden sehen, dass das so definierte Lebesgue-Integral wesentlich allgemeiner und flexibler als das Riemann-Integral ist.

3 Konstruktion und Eigenschaften des Integrals

Wir betrachten zunächst einen Messraum $(X, \mathcal{S})$.

3.1 Stufenfunktionen

Eine messbare Funktion $s \colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Stufenfunktion*, wenn ihr Bild $s(X)$ endlich ist. Wenn wir zwei Stufenfunktionen addieren oder mit einem Skalar multiplizieren, so erhalten wir wieder eine messbare Funktion mit endlichem Bild, also wieder eine Stufenfunktion. Die Stufenfunktionen bilden daher einen Vektorraum.

3.1 Beispiele.

(a) Jede konstante Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist nach Beispiel 1.18 messbar und somit eine Stufenfunktion.

(b) Funktionen mit zwei Werten (etwa 0 und 1): Nach Beispiel 1.19 ist die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$ einer Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann messbar (und somit eine Stufenfunktion), wenn A messbar ist, also $A \in \mathcal{S}$.

(c) Im Falle $(X, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist jede Treppenfunktion (wie in der Analysis I zur Definition des Riemannintegrals benutzt) insbesondere eine Stufenfunktion, aber eine Stufenfunktion braucht keine Treppenfunktion zu sein. Beispielsweise ist $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ eine Stufenfunktion auf $\mathbb{R}$, aber keine Treppenfunktion.

Lemma 3.2 *Eine Funktion $s \colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_j \in \mathcal{S}$ gibt derart, dass $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$.*

Beweis. Sind $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \mathcal{S}$ für $j = 1, \ldots, k$ paarweise disjunkt, so ist $s := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ messbar nach Satz 1.30 und somit eine Stufenfunktion, da s offensichtlich nur endlich viele Werte annehmen kann (nur 0 oder $\alpha_1, \dots, \alpha_k$). Sei nun umgekehrt s eine Stufenfunktion und $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ mit paarweise verschiedenen Zahlen α_j. Dann sind die Mengen $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$ messbar, und es ist $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$. □

Die folgende Beobachtung ist nützlich:

Lemma 3.3 *Sind $s, t\colon X \to \mathbb{R}$ Stufenfunktionen, so gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}$ sowie reelle Zahlen α_j, β_j für $j \in \{1, \dots, k\}$ derart, dass $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ und $t = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{1}_{A_j}$.*

Beweis. Es ist $s = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{1}_{A_i}$ und $t = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{B_j}$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen A_i bzw. B_j und Zahlen $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. Indem wir notfalls $a_{k+1} := 0$ und $A_{k+1} := X \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i$ hinzunehmen (und analog für die zweite Zerlegung), dürfen wir $\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j = X$ annehmen. Die Mengen $A_i \cap B_j$ sind paarweise disjunkt, und ihre Vereingung ist X. Wir schreiben

$$\big\{A_i \cap B_j \colon i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, m\big\} \ =: \ \{C_\ell \colon \ell = 1, \dots, n\}$$

mit paarweise verschiedenen Mengen C_ℓ. Ist $C_\ell = \emptyset$, so wählen wir $\alpha_\ell, \beta_\ell \in \mathbb{R}$ beliebig. Ist $C_\ell \neq \emptyset$, so gibt es eindeutig bestimmte i, j mit $C_\ell = A_i \cap B_j$; wir setzen $\alpha_\ell := a_i$ und $\beta_\ell := b_j$ und behaupten, dass nun

$$s \ = \ \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \mathbf{1}_{C_\ell} \quad \text{und} \tag{15}$$

$$t \ = \ \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell \mathbf{1}_{C_\ell}\,. \tag{16}$$

In der Tat: Für jedes $x \in X$ gibt es genau ein i und genau ein j mit $x \in A_i \cap B_j$. Dann ist $A_i \cap B_j = C_\ell$ für genau ein ℓ. Somit $s(x) = a_i = \alpha_\ell$, was auch der Wert der rechten Seite von (15) an der Stelle x ist. Weiter ist $t(x) = b_j = \beta_\ell$ der Wert der rechten Seite von (16) an der Stelle x. □

Satz 3.4 (Approximationssatz für messbare Funktionen). *Es sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende*[16] *Folge von Stufenfunktionen $s_n \colon X \to [0, \infty[$ derart, dass*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \ = \ f(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Man kann sogar erreichen, dass die Konvergenz auf jeder der Mengen $\{x \in X \colon f(x) \leq c\}$ mit $c \in [0, \infty[$ gleichmäßig ist.

[16] Dies ist punktweise gemeint: Für jedes $x \in X$ ist $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Elementen von $[0, \infty]$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $s_n\colon X \to \mathbb{R}$ via

$$s_n(x) \;:=\; \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{falls } f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\text{ mit } k \in \{0,1,\ldots,n\cdot 2^n-1\}, \\ n & \text{falls } f(x) \in [n,\infty]. \end{cases}$$

Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen. Ist $c \in [0,\infty[$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq c$:

$$|f(x) - s_n(x)| \;<\; \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } f(x) \leq c.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ sowie die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) < \infty\}$. Die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ ist offensichtlich. □

Folgerung 3.5 *Eine Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn sie punktweiser Grenzwert einer Folge von Stufenfunktionen ist.*

Beweis. Punktweise Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen sind nach Satz 1.48 messbar. Ist umgekehrt f messbar, so sind nach Lemma 1.40 (b) und Satz 1.47 auch die nicht-negativen Funktionen $f_\pm\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f_+ \;:=\; \max(f,0) \quad \text{und} \quad f_- \;:=\; \max(-f,0) \tag{17}$$

messbar. Nach Satz 3.4 existieren Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen, die punktweise gegen f_+ bzw. f_- konvergieren. Dann ist $(s_n - t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stufenfunktionen, die punktweise gegen $f = f_+ - f_-$ konvergiert (da hier keine undefinierten Summen wie $\infty + (-\infty)$ oder $(-\infty) + \infty$ auftreten). □

Hierbei wurde der folgende Sachverhalt benutzt, den wir in der Übung beweisen:

Lemma 3.6 (Stetigkeit der Addition in $\overline{\mathbb{R}}$). *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ mit Limes a bzw. b in $\overline{\mathbb{R}}$. Ist $a+b$ definiert,*[17] *so ist auch a_n+b_n für alle genügend großen n definiert, und es gilt $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.* □

Beachten Sie, dass die Bedingung an a und b stets erfüllt ist, wenn wir nur konvergente Folgen in $[0,\infty]$ betrachten.

Definition 3.7 Die messbaren Funktionen $f_+\colon X \to [0,\infty]$ und $f_-\colon X \to [0,\infty]$ aus (17) werden der *Positiv-* und *Negativteil* der messbaren Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ genannt.

Eine nützliche Konsequenz aus dem Approximationssatz ist auch die folgende Verallgemeinerung von Satz 1.30:

[17] Verlangt ist also $(a,b) \notin \{(-\infty,\infty),(\infty,-\infty)\}$.

Folgerung 3.8 *Es seien $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen derart, dass $f(x)+g(x)$ für alle $x \in X$ definiert ist, also $(f(x), g(x)) \notin \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\}$. Dann ist $f+g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

Beweis. Nach Satz 3.4 sind f und g punktweise Grenzwerte von Stufenfunktionen, also auch $f+g$, da per Voraussetzungen keine undefinierten Summen der Gestalt $\infty + (-\infty)$ oder $(-\infty) + \infty$ auftreten. Nach Folgerung 3.5 ist somit $f+g$ messbar. □

3.2 Konstruktion des Integrals

Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Wir definieren das Integral von f bzgl. des Maßes μ in mehreren Schritten.

Schritt 1. Ist $f = \mathbf{1}_A$ mit $A \in \mathcal{S}$, so setzen wir $I(f) := \mu(A)$.

Schritt 2. Ist $f : X \to [0, \infty[$ eine nicht-negative Stufenfunktion, so schreiben wir f als $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ mit $\alpha_i \in [0, \infty[$ und paarweise disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{S}$ (vgl. Lemma 3.2) und definieren

$$I(f) \;:=\; \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \mu(A_i)\,.$$

Dieser Ausdruck ist wohldefiniert. Sei nämlich auch $f = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$. Wie im Beweis von Lemma 3.3 dürfen wir $\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j = X$ annehmen. Gegeben i, j ist entweder $\mu(A_i \cap B_j) = 0$ oder $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, so dass ein $x \in A_i \cap B_j$ existiert und $\alpha_i = f(x) = \beta_j$ folgt. Da A_i die Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen $A_i \cap B_j$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist und B_j die Vereinigung der paarweise dijunkten Mengen $A_i \cap B_j$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$, folgt mit der Additivität des Maßes μ:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu(A_i) \;=\; \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \alpha_i\, \mu(A_i \cap B_j) \;=\; \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \beta_j\, \mu(A_i \cap B_j) \;=\; \sum_{j=1}^m \beta_j\, \mu(B_j)\,.$$

Sind f und g nicht-negative Stufenfunktionen mit $f \leq g$, so ist $I(f) \leq I(g)$. In der Tat: Nach Lemma 3.3 gibt es paarweise disjunkte messbare Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ und $\alpha_i, \beta_i \in [0, \infty[$ derart, dass $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ und $g = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{1}_{A_i}$. Ist $\mu(A_i) \neq 0$, so ist $A_i \neq \emptyset$; wir wählen $x \in A_i$ und schließen $\alpha_i = f(x) \leq g(x) = \beta_i$. Somit

$$I(f) \;=\; \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu(A_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^k \beta_i\, \mu(A_i) \;=\; I(g)\,.$$

Schritt 3. Ist $f\colon X \to [0, \infty]$ eine nicht-negative, messbare Funktion, so definieren wir

$$\int_X f\, d\mu \;:=\; \sup\{I(s)\colon s \text{ Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f\} \;\in\; [0, \infty] \tag{18}$$

als das Supremum über die Zahlen $I(s)$, wenn s die Menge aller unterhalb von f gelegenen nicht-negativen Stufenfunktionen durchläuft.

Bemerkungen.

(a) Das Supremum wird hier über eine nicht-leere Menge gebildet (vgl. Satz 3.4).

(b) Man beachte, dass $\int_X f \, d\mu$ den Wert ∞ annehmen kann.

(c) Ist f selbst eine nicht-negative Stufenfunktion, so ist $\int_X f \, d\mu = I(f)$. Für jede Stufenfunktion $0 \le s \le f$ ist nämlich $I(s) \le I(f)$.

Schritt 4. Nun sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind der Positivteil $f_+ := \max(f, 0)$ und Negativteil $f_- := \max(-f, 0)$ von f nicht-negative messbare Funktionen. Die Integrale

$$\int_X f_+ \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_X f_- \, d\mu \tag{19}$$

sind daher wie in Schritt 3 erklärt. Da $f = f_+ - f_-$, ist die folgende Definition sehr natürlich:

Definition 3.9 Ist eines der Integrale in (19) endlich, so definieren wir

$$\int_X f \, d\mu \ := \ \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \ \in \ \overline{\mathbb{R}}\,. \tag{20}$$

Sind beide Integrale in (19) endlich, so heißt f (bzgl. μ über X) *Lebesgue-integrierbar* (oder kurz: *integrierbar*). Man schreibt auch

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) \ := \ \int_X f \, d\mu\,.$$

Beachten Sie, dass wir das Integral von f auch dann definiert haben, wenn f nicht integrierbar ist, aber wenigstens eine der beiden Funktionen $f_\pm$ diese Eigenschaft hat. Das ist in vielen Situationen bequem. Beachten Sie auch, dass per Definition jede integrierbare Funktion insbesondere messbar ist.

Definition 3.10 Wir schreiben $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ für die Menge aller bzgl. μ über X Lebesgue-integrierbaren *reellwertigen* Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$.

Hier ist ein erstes, sehr einfaches Beispiel eines Integrals (Details prüfen wir in der Übung).

Beispiel 3.11 (Integrale bzgl. Dirac-Maßen). Es sei X eine Menge, $x \in X$ und $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das Dirac-Maß in x (siehe Beispiel 2.3 (b)). Dann gilt

$$\int_X f \, d\delta_x \ = \ f(x) \tag{21}$$

für jede Funktion $f : X \to [0, \infty]$. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau bzgl. δ_x integrierbar, wenn $f(x) \in \mathbb{R}$; auch in diesem Fall gilt (21).

Lemma 3.12 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum.*

(a) *Sind $f, g \colon X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen mit $f \leq g$, so ist $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.*

(b) *Sind $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und $f \leq g$, so ist*

$$\int_X f \, d\mu \;\leq\; \int_X g \, d\mu \,.$$

(c) *Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion derart, dass $\int_X f \, d\mu$ im Sinne von* (20) *existiert, so existiert auch $\int_X cf \, d\mu$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, und es gilt*

$$\int_X cf \, d\mu \;=\; c \int_X f \, d\mu \,.$$

(d) *Ist $\mu(X) < \infty$ und f messbar und beschränkt, so ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, und es gilt*

$$a \cdot \mu(X) \;\leq\; \int_X f \, d\mu \;\leq\; b \cdot \mu(X) \tag{22}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq f \leq b$.

(e) *Ist $\mu(X) = 0$, so ist $\displaystyle\int_X f \, d\mu = 0$ für jede messbare Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

(f) *Ist $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so ist $\mu(\{x \in X \colon f(x) \in \{-\infty, \infty\}\}) = 0$.*

(g) *Ist $f \colon X \to [0, \infty]$ messbar und $\int_X f \, d\mu = 0$, so gilt $\mu\big(\{x \in X \colon f(x) \neq 0\}\big) = 0$.*

Beweis. (a) Für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ gilt auch $0 \leq s \leq g$. Somit $\int_X f \, d\mu = \sup\{I(s) \colon 0 \leq s \leq f\} \leq \sup\{I(s) \colon 0 \leq s \leq g\} = \int_X g \, d\mu$.

(b) Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $g_- \leq f_-$. Nach (a) ist also

$$\int_X f_+ \, d\mu \;\leq\; \int_X g_+ \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_X g_- \, d\mu \;\leq\; \int_X f_- \, d\mu$$

und daher $\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \leq \int_X g_+ \, d\mu - \int_X g_- \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

(c) Aus der Definition des Integrals und $(-f)_+ = f_-$ sowie $(-f)_- = f_+$ folgt sofort

$$\int_X (-f) \, d\mu \;=\; -\int_X f \, d\mu \,.$$

Wir dürfen daher $c \geq 0$ annehmen und sogar $c > 0$, denn der Fall $c = 0$ ist trivial. Da $(cf)_+ = cf_+$ und $(cf_-) = cf_-$, braucht die Behauptung nur für $f_\pm$ gezeigt zu werden. Wir dürfen daher $f \geq 0$ annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_X cf \, d\mu \;&=\; \sup\{I(s) \colon 0 \leq s \leq cf\} \;=\; \sup\{I(s) \colon 0 \leq \tfrac{1}{c} s \leq f\} \\
&=\; \sup\{c\, I(\tfrac{1}{c} s) \colon 0 \leq \tfrac{1}{c} s \leq f\} \;=\; c \sup\{I(t) \colon 0 \leq t \leq f\} \;=\; c \int_X f \, d\mu \,,
\end{aligned}$$

denn für jede nicht-negative Stufenfunktion s gilt trivialerweise $I(cs) = cI(s)$.

(d) Sei $|f| \leq M$ mit $M \in [0, \infty[$. Dann ist auch $f_\pm \leq M = M\,\mathbf{1}_X$ und daher $\int_X f_\pm d\mu \leq \int_X M\mathbf{1}_X\, d\mu = M\mu(X) < \infty$ nach (a). Somit $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. Ist $a \leq f \leq b$, so ist also $a\,\mathbf{1}_X \leq f \leq b\,\mathbf{1}_X$ und somit $a\mu(X) = \int_X a\mathbf{1}_X\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu \leq \int_X b\mathbf{1}_X\, d\mu = b\mu(X)$, nach (b).

(e) Für alle Stufenfunktionen s gilt $I(s) = 0$. Hieraus folgt $\int_X f_\pm\, d\mu = 0$ und daraus die Behauptung.

(f) Da $f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) = (f_+)^{-1}(\{\infty\}) \cup (f_-)^{-1}(\{\infty\})$, genügt es, $f \geq 0$ anzunehmen und $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ zu zeigen. Wir setzen $N := f^{-1}(\{\infty\})$. Für jedes $r \in [0, \infty[$ ist dann $0 \leq r\,\mathbf{1}_N \leq f$ und somit $r\,\mu(N) = I(r\,\mathbf{1}_N) \leq \int_X f\, d\mu$. Da $\int_X f\, d\mu < \infty$, folgt $\mu(N) = 0$ (sonst könnten wir die linke Seite beliebig groß machen).

(g) Wir setzen $X_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ und $\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, somit $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n)$ nach Lemma 2.4 (c). Wir brauchen daher nur $\mu(X_n) = 0$ zu zeigen. Da $\frac{1}{n}\mathbf{1}_{X_n} \leq f$, gilt $\frac{1}{n}\mu(X_n) = \int_X \frac{1}{n}\mathbf{1}_{X_n}\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu = 0$. Daraus folgt wie gewünscht $\mu(X_n) = 0$. □

3.3 Integration über Teilmengen

Gegeben einen Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ (z.B. $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Borel-Maß) möchte man häufig eine Funktion nicht über ganz X integrieren, sondern nur über eine messbare Teilmenge $A \in \mathcal{S}$ von X. Da die Einschränkung $\mu|_A$ von μ auf die Spur $\mathcal{S}|_A$ der σ-Algebra $\mathcal{S}$ auf A ein Maß auf A ist (siehe Beispiel 2.3 (d)), können wir diesen Fall auf die bisherige Integral-Definition zurückführen:

Definition 3.13 Ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $A \in \mathcal{S}$ und $f : B \to \overline{\mathbb{R}}$ eine auf einer Obermenge $B \in \mathcal{S}$ von A definierte messbare Funktion auf $(B, \mathcal{S}|_B)$, so setzen wir

$$\int_A f\, d\mu \ := \ \int_A f|_A\, d\mu|_A$$

wann immer das Integral auf der rechten Seite definiert ist.

Zur späteren Benutzung halten wir einige recht offensichtliche Eigenschaften fest:

Lemma 3.14 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$. Dann gilt:*

(a) *Für jede nicht-negative Stufenfunktion $s : X \to [0, \infty[$ der Form $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{S}$ ist*

$$\int_A s\, d\mu \ = \ \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu(A_i \cap A)\,.$$

(b) *Sind $f, g : (B, \mathcal{S}|_B) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen, die auf A übereinstimmen, so ist $\int_A f\, d\mu$ genau dann definiert, wenn das Integral $\int_A g\, d\mu$ definiert ist, und die zwei Integrale stimmen in diesem Fall überein. Weiter ist $\int_A f\, d\mu$ genau dann definiert, wenn $\int_B \mathbf{1}_A^B \cdot f\, d\mu$ definiert ist, und die zwei Integrale stimmen in diesem Fall überein.*

(c) *Ist f bzgl. μ über X integrierbar, so auch über A. Insbesondere $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu) \Rightarrow f|_A \in \mathcal{L}^1(A, \mu|_A)$.*

Beweis. (a) Es ist $s|_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}^X|_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i \cap A}^A$ eine Stufenfunktion auf A und somit $\int_A s\, d\mu = \int_A s|_A\, d\mu|_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu|_A(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu(A_i \cap A)$.

(b) Da $f|_A = g|_A$ und nur diese Einschränkung in die Definition des Integrals über A eingeht, ist die erste Behauptung offensichtlich. Die zweite Behauptung lässt sich wie folgt begründen (wir überspringen den Beweis in der Vorlesung): Da $(\mathbf{1}_A^B f)_\pm = \mathbf{1}_A^B (f_\pm)$, genügt es, die Gleichheit der fraglichen Integrale für nicht-negative messbare Funktionen f zu zeigen. Für jede nicht-negative Stufenfunktion $s\colon A \to [0, \infty[$ mit $s \leq f|_A$ ist die durch $\tilde{s} := s(x)$ für $x \in A$, $\tilde{s}(x) := 0$ für $x \in B \setminus A$ definierte Funktion $\tilde{s}\colon B \to [0, \infty[$ eine Stufenfunktion mit $\int_A s\, d\mu = \int_B \tilde{s}\, d\mu$ (siehe Beweis von (c)) und $\tilde{s} \leq \mathbf{1}_A^B \cdot f$. Wir beobachten nun, dass jede nicht-negative Stufenfunktion $t \leq \mathbf{1}_A^B f$ auf B sich als $t = \tilde{s}$ mit $s := t|_A$ schreiben lässt (da $t|_{B \setminus A} = 0$). Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_A f\, d\mu &= \sup\left\{ \int_A s\, d\mu \ : s \text{ St.fkt. auf } A \text{ mit } 0 \leq s \leq f|_A \right\} \\
&= \sup\left\{ \int_B \tilde{s}\, d\mu \ : s \text{ St.fkt. auf } A \text{ mit } 0 \leq s \leq f|_A \right\} \\
&= \sup\left\{ \int_B t\, d\mu \ : t \text{ St.fkt. auf } B \text{ mit } 0 \leq t \leq \mathbf{1}_A^B \cdot f \right\} \ = \ \int_B \mathbf{1}_A^B f\, d\mu\,.
\end{aligned}
$$

(c) Für jede Stufenfunktion $0 \leq s \leq f_+|_A$ auf A der Gestalt $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}^A$ ist $\tilde{s} := \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}^X$ eine Stufenfunktion auf X, die s fortsetzt; da $\tilde{s}|_{X \setminus A} = 0$ ist weiter $0 \leq \tilde{s} \leq f_+$. Somit $I_A(s) := \int_A s\, d\mu|_A = \sum_{i=1}^k \alpha_i\, \mu(A_i) = \int_X \tilde{s}\, d\mu = I_X(\tilde{s}) \leq \int_X f_+\, d\mu$. Also $\int_A f_+\, d\mu = \sup_s I_A(s) \leq \int_X f_+\, d\mu < \infty$. Für f_- geht es analog. □

Man würde erwarten, dass für disjunkte messbare Mengen A_1, A_2 stets

$$
\int_{A_1 \cup A_2} f\, d\mu \ = \ \int_{A_1} f\, d\mu + \int_{A_2} f\, d\mu\,.
$$

Der folgende Satz garantiert dies und stellt zusätzliche Information bereit.

Satz 3.15 (Maße mit Dichten). *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $\rho\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann gilt:*

(a) *Ist ρ nicht-negativ, so ist $\mu_\rho\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$,*

$$
\mu_\rho(A) \ := \ \int_A \rho\, d\mu \qquad \text{für } A \in \mathcal{S} \tag{23}
$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$.

(b) *Ist ρ bzgl. μ über X integrierbar, so definiert* (23) *eine σ-additive Funktion*[18] $\mu_\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

Beweis. (b) Aus der Definition des Lebesgue-Integrals als Differenz der Integrale von Positiv- und Negativteil folgt, dass $\mu_\rho = \mu_{\rho+} - \mu_{\rho-}$. Gilt (a), so sind $\mu_{\rho+}$ und $\mu_{\rho-}$ σ-additive Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ (da $\rho_\pm \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$). Aufgrund der Stetigkeit der Addition reeller Zahlen ist dann auch $\mu_\rho = \mu_{\rho+} - \mu_{\rho-}$ σ-additiv.

(a) Zunächst beobachten wir (zur späteren Benutzung im Beweis), dass μ_ρ monoton ist: Sind $A, B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$, so folgt wegen $\mathbf{1}_A \cdot \rho \leq \mathbf{1}_B \cdot \rho$ aus der Monotonie des Integrals:

$$\mu_\rho(A) \;=\; \int_A \rho \, d\mu \;=\; \int_X \mathbf{1}_A \cdot \rho \, d\mu \;\leq\; \int_X \mathbf{1}_B \cdot \rho \, d\mu \;=\; \mu_\rho(B)\,.$$

Da $\mu_\rho(\emptyset) = 0$ (vgl. Satz 3.12 (e)), ist nur noch die σ-Additivität von μ_ρ zu zeigen. Dies zeigen wir für zunehmend allgemeine Funktionen ρ:

Ist $\rho = \mathbf{1}_E$ eine charakteristische Funktion, so ist $\int_A \rho \, d\mu = \mu(E \cap A)$, und die Behauptung folgt aus der σ-Additivität von μ. Ist $\rho = \sum_j c_j \, \mathbf{1}_{E_j}$ eine Stufenfunktion mit paarweise disjunkten Mengen $E_j \in \mathcal{S}$, so ist nach Lemma 3.14 (a)

$$\int_A \rho \, d\mu \;=\; \sum_j c_j \, \mu(E_j \cap A)\,,$$

und die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.6 aus der σ-Additivität aller Summanden.

Allgemeiner Fall: Sei nun $\rho \geq 0$ messbar und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit paarweise disjunkten Mengen $A_n \in \mathcal{S}$. Wir haben zu zeigen, dass $\mu_\rho(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu_\rho(A_n)$.

Aus dem bereits Bewiesenen folgt für jede Stufenfunktion s auf X mit $0 \leq s \leq \rho$, dass

$$\int_A s \, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} s \, d\mu \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} \rho \, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^\infty \mu_\rho(A_n)\,.$$

Bilden wir links das Supremum über alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq \rho$, so folgt

$$\mu_\rho(A) \;=\; \int_A \rho \, d\mu \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty \mu_\rho(A_n)\,,$$

wir haben also nur noch $\sum_{n=1}^\infty \mu_\rho(A_n) \leq \mu_\rho(A)$ zu zeigen. Für $\mu_\rho(A) = \infty$ ist dies trivial. Sei nun also $\mu_\rho(A) < \infty$ und somit auch $\mu_\rho(A_n) < \infty$ für alle n. Nach Definition der Integrale über A_1 und A_2 gibt es für $j \in \{1, 2\}$ Stufenfunktionen $s_j : A_j \to [0, \infty[$ mit $0 \leq s_j \leq \rho|_{A_j}$ derart, dass

$$\int_{A_j} s_j \, d\mu \;\geq\; \int_{A_j} \rho \, d\mu \;-\; \varepsilon\,.$$

[18] Solche Funktionen nennt man auch "signierte Maße."

Dann ist die durch $s(x) := s_j(x)$ für $x \in A_j$ und $s(x) := 0$ für $x \in X \setminus (A_1 \cup A_2)$ definierte Funktion $s\colon X \to [0, \infty[$ eine Stufenfunktion auf X mit $0 \le s \le \rho$ und

$$\int_{A_j} s\, d\mu \ge \int_{A_j} \rho\, d\mu \;-\; \varepsilon \qquad \text{für } j \in \{1, 2\}.$$

Folglich ist

$$\mu_\rho(A_1 \cup A_2) \;=\; \int_{A_1 \cup A_2} \rho\, d\mu \;\ge\; \int_{A_1 \cup A_2} s\, d\mu \;=\; \int_{A_1} s\, d\mu + \int_{A_2} s\, d\mu \;\ge\; \mu_\rho(A_1) + \mu_\rho(A_2) - 2\varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu_\rho(A_1 \cup A_2) \ge \mu_\rho(A_1) + \mu_\rho(A_2)$. Da die umgekehrte Inklusion oben bereits gezeigt wurde, ist also $\mu_\rho(A_1 \cup A_2) = \mu_\rho(A_1) + \mu_\rho(A_2)$. Induktiv erhalten wir

$$\mu_\rho\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu_\rho(A_k) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq A$ ist offensichtlich $\mu_\rho(A) \ge \mu_\rho\big(\bigcup_{j=1}^{n} A_k\big)$. Aus dem Vorigen folgt daher

$$\mu_\rho(A) \;\ge\; \lim_{n\to\infty} \mu_\rho\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_\rho(A_k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\rho(A_k)\,.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Im Moment brauchen wir Satz 3.15 nur als technisches Hilfsmittel; in Kapitel 5 werden wir bzgl. solcher "Maße mit Dichten" dann auch integrieren und etwas mehr damit anfangen.

Folgerung 3.16 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Sind $A \subseteq B$ messbare Mengen mit $\mu(B \setminus A) = 0$ und ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ nicht-negativ oder integrierbar, so gilt*

$$\int_A f\, d\mu = \int_B f\, d\mu\,.$$

Beweis. Die Funktion $\mu_f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, $\mu_f(E) := \int_E f\, d\mu$ ist nach Satz 3.15 additiv. Folglich ist $\mu_f(B) = \mu_f(A) + \mu_f(B \setminus A)$, wobei $\mu_f(B \setminus A) = 0$ nach Lemma 3.12 (e). □

Folgerung 3.16 zeigt, dass man Mengen vom Maß 0 beim Integrieren vernachlässigen darf.

Definition 3.17 Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Gilt eine Eigenschaft P für alle Punkte von X außerhalb einer Menge vom Maß 0, so sagt man P gelte *fast überall* (oder auch: *für fast alle x*).

Beispiel: Für die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{1}_\mathbb{Q}(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes auf $\mathbb{R}$.

Folgerung 3.18 *Es seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt:*

(a) *Die Mengen* $E := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *und* $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ *sind messbar.*

(b) *Sind* $f, g \geq 0$ *und ist* $f(x) = g(x)$ *fast überall* (*also* $\mu(X \setminus E) = 0$), *so ist* $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

(c) *Gilt* $f(x) = g(x)$ *fast überall, so ist* f *bzgl.* μ *genau dann integrierbar, wenn* g *es ist. In diesem Fall ist* $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

Beweis. (a) überprüfen wir in der Übung.

(b) Es ist $\int_X f\, d\mu = \int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu = \int_X g\, d\mu$, wobei die erste und letzte Gleichheit auf Folgerung 3.16 beruht, die zweite auf Lemma 3.14 (b).

(c) Gilt $f(x) = g(x)$ fast überall, so gilt auch $f_\pm(x) = g_\pm(x)$ fast überall. Die Behauptung folgt daher aus Teil (b). □

Man darf also messbare Funktionen auf Mengen vom Maß 0 abändern, ohne ihr Integral zu verändern (solange die abgeänderte Funktion nach wie vor messbar ist).

Satz 3.19 *Es sei* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *ein Maßraum. Ist* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrierbar, so auch* $|f|$, *mit*

$$\Big| \int_X f\, d\mu \Big| \;\leq\; \int_X |f|\, d\mu\,.$$

Beweis. Es sei $A := \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ und $B := X \setminus A = \{x \in X : f(x) < 0\}$. Nach Satz 3.15 (a) ist

$$\int_X |f|\, d\mu \;=\; \int_A |f|\, d\mu \;+\; \int_B |f|\, d\mu \;=\; \int_A f_+\, d\mu + \int_B f_-\, d\mu \;<\; \infty\,.$$

Also ist $|f|$ integrierbar. Wegen $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ ist nun

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu \quad \text{und} \quad -\int_X f\, d\mu \;=\; \int_X (-f)\, d\mu \;\leq\; \int_X |f|\, d\mu$$

nach Lemma 3.12 (b) und (c). Folglich $|\int_X f\, d\mu| \leq \int_X |f|\, d\mu$. □

Das folgende Kriterium macht es in vielen Fällen sehr leicht, die Integrierbarkeit einer gegebenen messbaren Funktionen zu zeigen:

Satz 3.20 (Majorantenkriterium). *Ist* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar,* $g : X \to [0, \infty]$ *bzgl.* μ *integrierbar und* $|f| \leq g$, *so ist auch* f *bzgl.* μ *integrierbar.*

Beweis. Dies folgt sofort aus $f_+ \leq g$ und $f_- \leq g$. □

3.4 Konvergenzsätze

Wir wenden uns nun den Konvergenzsätzen für das Lebesgue-Integral zu, die unter sehr schwachen Voraussetzungen das Vertauschen von Grenzprozessen und Integration erlauben:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x) \;=\; \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\; d\mu(x)\,.$$

Die Konvergenzsätze sind mächtige und häufig benutzte Werkzeuge der Analysis.

In diesem Abschnitt ist $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Wir beweisen zunächst einen auch als "Satz von Beppo Levi" bekannten, extrem wichtigen Konvergenzsatz.

Satz 3.21 (Satz über monotone Konvergenz). *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer messbarer Funktionen $f\colon X \to [0,\infty]$ mit*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \qquad \text{für alle } x \in X,$$

so existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X$, die Grenzfunktion $f\colon X \to [0,\infty]$ ist messbar, und $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$.

Beweis. Nach Lemma 1.42 existiert der Limes $f(x)$ für jedes x, und nach Satz 1.48 ist f messbar als punktweiser Limes messbarer Funktionen. Setze $\alpha_n := \int_X f_n\, d\mu$ für $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst, ist sie nach Lemma 1.42 und Lemma 1.45 (a) in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, mit Limes

$$\alpha \;:=\; \lim_{n\to\infty} \alpha_n \;=\; \sup\{\alpha_n \colon n \in \mathbb{N}\} \;\in\; [0,\infty]\,.$$

Da $f_n \le f$, gilt $\alpha_n = \int_X f_n\, d\mu \le \int_X f\, d\mu$ nach Lemma 3.12 (a) und somit auch $\alpha \le \int_X f\, d\mu$.

Um die umgekehrte Ungleichung $\alpha \ge \int_X f\, d\mu$ zu zeigen, dürfen wir $\alpha < \infty$ annehmen (sonst ist die Aussage trivial). Sei nun s eine Stufenfunktion mit $0 \le s \le f$, $c \in\,]0,1[$ und $X_n := \{x \in X : f_n(x) \ge cs(x)\}$; nach Folgerung 3.18 (a) ist X_n messbar. Dann ist $X_n \subseteq X_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst). Weiter ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, denn ist $x \in X$, so ist entweder $s(x) = 0$ und somit $x \in X_1$, oder es ist $s(x) > 0$, so dass wegen $s(x) \le f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ein n mit $f_n(x) > cs(x)$ existiert.

Mit Satz 3.15 (a) sowie Lemma 3.12 (a) und (c) erhalten wir außerdem

$$\int_X f_n\, d\mu \;\ge\; \int_{X_n} f_n\, d\mu \;\ge\; \int_{X_n} cs\, d\mu \;=\; c\int_{X_n} s\, d\mu\,. \tag{24}$$

Für $n \to \infty$ folgt aus (24), Satz 3.15 (a) und Lemma 2.4 (c)

$$\alpha \;\ge\; \lim_{n\to\infty} c\int_{X_n} s\, d\mu \;=\; c\int_X s\, d\mu\,.$$

Da $c \in\,]0,1[$ beliebig war, folgt $\alpha \ge \int_X s\, d\mu$ für alle Stufenfunktionen s mit $0 \le s \le f$ und somit $\alpha \ge \int_X f\, d\mu$, was den Beweis beendet. □

Bemerkung 3.22 Ist $f : X \to [0,\infty]$ messbar, so gibt es nach Satz 3.4 eine monoton wachsende Folge $s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ nicht-negativer Stufenfunktionen $s_n : X \to [0,\infty[$, die punktweise gegen f konvergiert. Als Spezialfall des Satzes über monotone Konvergenz ist

$$\int_X f\,d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu \;=\; \sup\left\{ \int_X s_n\,d\mu \colon n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{25}$$

Beachten Sie, dass wir (25) *nicht* zur Definition des Integrals $\int_X f\,d\mu$ der nicht-negativen messbaren Funktion f benutzt haben, sondern das Supremum der Menge aller Integrale unter f liegender Stufenfunktionen bilden mussten—schlagen Sie Gleichung (18) auf Seite 27 noch einmal nach![19]

Lemma 3.12 (c) und der folgende Satz zeigen, dass $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ ein reeller Vektorraum ist.

Satz 3.23 *Es seien $f,g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen. Dann gilt:*

(a) *Sind $f,g \geq 0$, so ist*

$$\int_X (f+g)\,d\mu \;=\; \int_X f\,d\mu \;+\; \int_X g\,d\mu\,. \tag{26}$$

(b) *Sind $f,g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, so ist auch $f+g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ und (26) gilt.*

Beweis. (a) Wir zeigen (26) zunächst für nicht-negative Stufenfunktionen $f,g : X \to [0,\infty[$. Nach Lemma 3.3 existieren paarweise disjunkte Mengen $A_1,\ldots,A_k \in \mathcal{S}$ und $\alpha_i,\beta_i \in [0,\infty[$ derart, dass $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ und $g = \sum_{j=1}^k \beta_i \mathbf{1}_{A_i}$. Dann ist $f+g = \sum_{i=1}^n (\alpha_i+\beta_i)\mathbf{1}_{A_i}$ und somit wie gewünscht

$$\int_X (f+g)\,d\mu \;=\; \sum_{i=1}^k (\alpha_i+\beta_i)\mu(A_i) \;=\; \sum_{i=1}^k \alpha_i\,\mu(A_i) + \sum_{i=1}^k \beta_i\,\mu(A_i) \;=\; \int_X f\,d\mu \;+\; \int_X g\,d\mu\,.$$

Nun seien $f,g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ beliebige nicht-negative messbare Funktionen. Dann gibt es nach Satz 3.4 monoton wachsende Folgen $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Stufenfunktionen derart, dass $s_j \to f$ und $t_j \to g$ punktweise. Dann ist $(s_j+t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer Stufenfunktionen mit $s_j + t_j \to f+g$ (siehe Lemma 3.6). Somit

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)\,d\mu \;&=\; \lim_{j\to\infty} \int_X (s_j+t_j)\,d\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \left(\int_X s_j\,d\mu + \int_X t_j\,d\mu \right) \\ &=\; \lim_{j\to\infty} \int_X s_j\,d\mu \;+\; \lim_{j\to\infty} \int_X t_j\,d\mu \;=\; \int_X f\,d\mu \;+\; \int_X g\,d\mu\,, \end{aligned}$$

wobei das erste und letzte Gleichheitszeichen auf dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.21) beruhen, das zweite auf dem bereits für Stufenfunktionen Gezeigten, das dritte auf Lemma 3.6.

[19] Erfahrungsgemäß werden (18) und (25) in mündlichen Prüfungen sehr häufig miteinander verwechselt!

(b) Offensichtlich gilt $(f+g)_+ \leq |f|+|g|$ und $(f+g)_- \leq |f|+|g|$. Da $|f|$ und $|g|$ nach Satz 3.19 integrierbar sind, ist $|f|+|g|$ nach Teil (a) integrierbar und somit auch $f+g$. Wegen $f+g = (f+g)_+ - (f+g)_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$ ist $(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+$ und somit nach Teil (a)

$$\begin{aligned}
&\int_X (f+g)_+ \, d\mu \; + \; \int_X f_- \, d\mu \; + \; \int_X g_- \, d\mu \\
&= \int_X \big((f+g)_+ + f_- + g_-\big) \, d\mu \; = \; \int_X \big((f+g)_- + f_+ + g_+\big) \, d\mu \\
&= \int_X (f+g)_- \, d\mu \; + \; \int_X f_+ \, d\mu \; + \; \int_X g_+ \, d\mu \, .
\end{aligned}$$

Subtrahiert man die entsprechenden Integrale mit Integranden $(f+g)_-$, f_- bzw. g_- auf beiden Seiten, so erhält man (26). □

Bemerkung 3.24 Es war erstaunlich aufwendig, die Additivität des Integrals zu beweisen! Sind f_1 und f_2 nicht-negative messbare Funktionen auf X, so ist zwar

$$\int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \; \leq \; \int_X (f_1 + f_2) \, d\mu$$

leicht einzusehen—denn für nicht-negative Stufenfunktionen $s_k \leq f_k$ ist $s_1 + s_2$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit $s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2$. Die umgekehrte Ungleichung aber ist nicht offensichtlich! Die Schwierigkeit rührt daher, dass man eine nicht-negative Stufenfunktion s mit $s \leq f_1 + f_2$ im Allgemeinen nicht als eine Summe $s = s_1 + s_2$ mit s_1, s_2 wie zuvor schreiben kann (ein Beispiel kommt in der Übung).

Der Satz über monotone Konvergenz lässt sich insbesondere auf Reihen nicht-negativer Funktionen anwenden. Man erhält:

Folgerung 3.25 *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0,\infty]$, so existiert der Grenzwert $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$ für alle $x \in X$, die so definierte Funktion $f : X \to [0,\infty]$ ist messbar, und es gilt*

$$\int_X f \, d\mu \; = \; \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $g_n := \sum_{j=1}^n f_j$ eine nicht-negative Funktion, die nach Folgerung 3.8 messbar ist. Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f. Mit dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 3.21) und der endlichen Additivität des Integrals (Satz 3.23 (a)) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d\mu \;&\overset{3.21}{=}\; \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \; = \; \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^n f_j \, d\mu \\
&\overset{3.23}{=}\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_X f_j \, d\mu \; = \; \sum_{j=1}^\infty \int_X f_j \, d\mu \, .
\end{aligned}$$

□

Hier sind zwei nützliche kleine Anwendungen.

Folgerung 3.26 (Integration bzgl. des Zählmaßes auf $\mathbb{N}$). *Es sei ζ das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (siehe Beispiel 2.3 (c)). Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{N}} a \, d\zeta \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{27}$$

für jede Funktion $a\colon \mathbb{N} \to [0,\infty]$, $n \mapsto a_n$. Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ ist genau dann bzgl. ζ integrierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert; wieder gilt (27).

Beweis. Sei zunächst $a \geq 0$. Dann ist $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{\{n\}}$ und somit nach Folgerung 3.25

$$\int_{\mathbb{N}} a \, d\zeta \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{\{n\}} \, d\zeta \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,,$$

wobei benutzt wurde, dass $\int_{\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{\{n\}} \, d\zeta \;=\; a_n \int_{\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{n\}} \, d\zeta \;=\; a_n \, \zeta(\{n\}) \;=\; a_n$.

Die zweite Aussage für Reihen reeller Zahlen folgt aus dem bereits Gezeigten durch Aufspaltung von a in Positiv- und Negativteil. □

Insbesondere kann man also absolut konvergente Reihen als Integrale interpretieren. Der Nutzen: Folgerung 3.26 ermöglicht es, die Konvergenzsätze für Integrale (z.B. monotone Konvergenz) *auch auf Reihen* anzuwenden. Ein Beispiel:

Folgerung 3.27 (Doppelreihensatz). *Gegeben $a_{n,m} \in [0,\infty]$ für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \,.$$

Beweis. Es sei ζ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \;=\; \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \right) d\zeta(n) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} a_{n,m} \, d\zeta(n) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \,;$$

hierbei wurde für das erste und letzte Gleichheitszeichen mit Folgerung 3.26 eine Reihe als Integral bzgl. des Zählmaßes umgeschrieben. Das zweite Gleichheitszeichen gilt nach Folgerung 3.25. □

Unser nächstes Ziel ist der Satz über majorisierte Konvergenz, das vermutlich wichtigste Werkzeug, um die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration zu zeigen. Vorbereitend überlegen wir uns ein Lemma.

Lemma 3.28 (von Fatou). *Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer messbarer Funktionen $f_n\colon X \to [0,\infty]$ gilt*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \,.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $g_k := \inf_{j \geq k} f_j$. Dann ist $g_k \leq f_k$ und somit $\int_X g_k \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu$. Weiter ist die Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, und sie konvergiert punktweise gegen $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$. Der Satz über monotone Konvergenz liefert

$$\int_X g_k \, d\mu \;\to\; \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

für $k \to \infty$. Somit $\liminf\limits_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu \geq \liminf\limits_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu = \int_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu$. □

Satz 3.29 (Lebesgues Satz über majorisierte Konvergenz). *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge messbarer Funktionen $f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, mit Limes*

$$f(x) \;:=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;\in \overline{\mathbb{R}}$$

für $x \in X$. Existiert eine bzgl. μ über X integrierbare Funktion $g \colon X \to [0,\infty]$ derart, dass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \;=\; \int_X f \, d\mu \,. \tag{28}$$

Beweis. Da $|f| \leq g$, ist f nach dem Majorantenkriterium (Satz 3.20) integrierbar. Nach Lemma 3.12 (f) ist $N := g^{-1}(\{-\infty,\infty\})$ eine Menge vom Maß 0. Setzen wir $E := X \setminus N$, ist wegen $|f_n| \leq g$ und $|f| \leq g$ jede der Funktionen $f|_E$, $f_n|_E$ und $g|_E$ reellwertig. Da

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \int_E f|_E \, d\mu|_E \quad \text{und} \quad \int_X f_n \, d\mu \;=\; \int_E f_n|_E \, d\mu|_E$$

nach Folgerung 3.16, genügt es, (28) anstelle für f_n und f für die durch $g|_E$ majorisierten Funktionen $f_n|_E$ und $f|_E$ auf dem Maßraum $(E, \mathcal{S}|_E, \mu|_E)$ zu zeigen. Wir dürfen daher nun o.B.d.A. annehmen, dass die Funktionen g, f_n und f alle reellwertig sind, was uns ermöglicht, diese Funktionen punktweise zu subtrahieren. Es ist $|f_n - f| \leq 2g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wenden nun das Lemma von Fatou auf die Funktionenfolge $(2g - |f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_X 2g \, d\mu \;&=\; \int_X \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\
&=\; \int_X 2g \, d\mu \;+\; \liminf_{n\to\infty} \int_X (-|f_n - f|) \, d\mu \\
&=\; \int_X 2g \, d\mu \;-\; \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \;\leq\; \int_X 2g \, d\mu \,.
\end{aligned}$$

Da $\int_X 2g \, d\mu \;=\; 2\int_X g \, d\mu \;<\; \infty$, können wir "$\leq$" hier durch "$=$" ersetzen und erhalten $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$, weswegen auch $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$ (vgl. Lemma 1.46).

Mit Satz 3.19 folgt nun

$$\Big| \int_X f_n \, d\mu \; - \; \int_X f \, d\mu \Big| \; \leq \; \int_X |f_n - f| \, d\mu \; \to \; 0 \, .$$

□

Beispiel. Wir betrachten eine Funktionenfolge, auf die sich der Satz über majorisierte Konvergenz *nicht* anwenden lässt (der "gleitende Buckel"). Dazu sei $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und $f_n := \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f \equiv 0$, aber

$$0 \; = \; \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \; = \; \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \; \neq \; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \; = \; 1 \, .$$

4 Vom Lebesgue-Borel-Maß zum Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral

Als Spezialfall der in Kapitel 3 entwickelten allgemeinen Integrationstheorie können wir insbesondere Funktionen bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ integrieren, des natürlichen Maßes auf $\mathbb{R}^n$. In diesem Kapitel erweitern wir zunächst die Klasse der integrierbaren Funktionen noch ein wenig, indem wir die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ durch eine größere σ-Algebra $\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ ersetzen und λ zu einem Maß $\tilde{\lambda}$ auf $\tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, dem sogenannten *Lebesgue-Maß*. Im Fall $n = 1$ zeigen wir, dass jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ einer Veränderlichen auf einem kompakten Intervall auch bzgl. $\tilde{\lambda}$ integrierbar ist, und dass das Riemann- und Lebesgue-Integral von f (bzgl. des Lebesgue-Maßes) in diesem Falle übereinstimmen. Das Lebesgue-Integral stellt somit eine Verallgemeinerung das üblichen Riemann-Integrals dar.

Anschließend wenden wir uns den für das Riemann-Integral bereits bekannten Sätzen über parameterabhängige Integrale zu. Wir werden sehen, dass man im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie die Voraussetzungen dieser Sätze enorm abschwächen kann.

4.1 Vervollständigung von Maßräumen und das Lebesgue-Maß

Wie wir in Folgerung 3.18 gesehen haben, spielen die Werte einer messbaren Funktion auf einer Menge N vom Maß 0 beim Integrieren keine Rolle: Für jede andere messbare Funktion, die mit f ausserhalb von N übereinstimmt, erhalten wir das selbe Integral. Das heißt allerdings nicht, dass man f auf N völlig beliebig abändern dürfte, denn auch die abgeänderte Funktion muss ja wieder messbar sein. Nimmt man an, dass gilt:

($*$) Jede Teilmenge einer messbaren Menge vom Maß 0 ist ebenfalls messbar,

so braucht man sich über die Messbarkeit der abgeänderten Funktion keine Gedanken zu machen: Diese besteht automatisch. Es ist daher für manche Zwecke bequem, einen Maßraum mit der Eigenschaft ($*$) (einen "vollständigen Maßraum") vorliegen zu haben. Wir werden sehen, dass sich jeder Maßraum zu einem vollständigen erweitern lässt.

Definition 4.1 Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt *μ-Nullmenge* (oder einfach *Nullmenge*), wenn $N \subseteq A$ für eine messbare Menge $A \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(A) = 0$.

(b) Der Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn jede μ-Nullmenge messbar ist.

Offensichtlich ist jede Teilmenge einer Nullmenge ebenfalls eine Nullmenge. Weiter ist jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge (Übung).

Beispiel 4.2 Die Nullmengen von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ kann man mit Satz 2.5 (b) leicht charakterisieren: $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge

$(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halboffener Quader Q_k gibt derart, dass

$$N \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) < \varepsilon \, .$$

Für $n = 1$ sind dies genau diejenigen Mengen, die in Analysis I oder II gelegentlich bereits unter dem Namen "Lebesgue-Nullmengen" eingeführt und diskutiert werden.

Beispiel 4.3 Jede abzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Borelmenge vom Maß $\lambda(A) = 0$, also insbesondere eine λ-Nullmenge. Hier benutzt man, dass einpunktige Teilmengen $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ Borelmengen vom Maß 0 sind; A ist eine abzählbare Vereinigung solcher Mengen.

Beispiel 4.4 Die *Cantormenge* C ist ein besonders lehrreiches Beispiel einer Lebesgue-Nullmenge von $\mathbb{R}$. Zur Erinnerung: Es ist $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, wobei $C_0 := [0,1]$ und

$$C_{n+1} := \tfrac{1}{3}C_n \cup \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_n\right)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Da jedes C_n kompakt ist, ist auch C kompakt und somit eine Borelmenge. Die Menge C_n ist eine Vereinigung von 2^n disjunkten Intervallen der Länge 3^{-n}, somit $\lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$ und daher

$$\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = 0$$

nach Lemma 2.4 (d). Man kann zeigen, dass die Abbildung

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C \, , \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$$

eine Bijektion ist; hierbei ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $(a_1, a_2, \ldots)$ mit $a_n \in \{0,1\}$. Daher ist C eine überabzählbare Menge (genauer: C hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$).

Beim Ändern messbarer Funktionen auf Nullmengen eines vollständigen Maßraums geht tatsächlich die Messbarkeit nicht verloren:

Lemma 4.5 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $(Y, \mathcal{T})$ ein beliebiger Messraum, $f\colon X \to Y$ messbar, $N \subseteq X$ eine Nullmenge und $g\colon N \to Y$ eine beliebige Funktion. Dann ist auch die auf N zu g abgeänderte Funktion*

$$\bar{f}\colon X \to Y \, , \qquad \bar{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in X \setminus N \\ g(x) & \text{falls } x \in N \end{cases}$$

messbar.

Beweis. Die Funktion $\bar{f}|_{X\setminus N} = f|_{X\setminus N}$ ist nach Beispiel 1.24 auf $(X\setminus N, \mathcal{S}|_{X\setminus N})$ messbar. Da $\mathcal{S}$ vollständig ist, gehört jede Teilmenge von N zu $\mathcal{S}$; also ist $\mathcal{S}|_N = \mathcal{P}(N)$ die Potenzmenge von N und somit $\bar{f}|_N$ automatisch auf $(N, \mathcal{S}|_N)$ messbar. Als stückweise messbare Funktion ist $\bar{f}$ nach Satz 1.36 (b) messbar. □

4.6 Einem beliebigen Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ wollen wir nun einen vollständigen Maßraum $(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ zuordnen. Dazu definieren wir $\tilde{\mathcal{S}}$ als die Menge aller Teilmengen A von X der Gestalt

$$A \;=\; B \cup N\,, \quad \text{wobei } B \in \mathcal{S} \text{ und } N \text{ eine } \mu\text{-Nullmenge ist.}$$

Für $A = B \cup N$ wie zuvor definieren wir

$$\tilde{\mu}(A) \;:=\; \mu(B)\,. \tag{29}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von B und N. Ist nämlich auch $C \in \mathcal{S}$ und M eine μ-Nullmenge mit $A = C \cup M$, so gibt es messbare Mengen $N', M' \in \mathcal{S}$ vom Maß 0 mit $N \subseteq N'$, $M \subseteq M'$. Wir haben $B \subseteq A = C \cup M \subseteq C \cup M'$ und somit

$$\mu(B) \;\leq\; \mu(C \cup M') \;\leq\; \mu(C) + \mu(M') \;=\; \mu(C)\,.$$

Analog sieht man $\mu(C) \leq \mu(B)$, so dass $\mu(B) = \mu(C)$. Durch (29) ist also eine Funktion $\tilde{\mu}\colon \tilde{\mathcal{S}} \to [0, \infty]$ wohl definiert.

Satz 4.7 *$(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum. Es gilt $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$ und $\tilde{\mu}|_{\mathcal{S}} = \mu$. Eine Menge $N \subseteq X$ ist genau dann eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge, wenn sie eine μ-Nullmenge ist.*

Beweis. Das überlegen wir uns in der Übung. □

Der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ mit dem Lebesgue-Borel-Maß $\lambda = \lambda_n$ ist *nicht* vollständig (siehe **4.12**). Es ist für manche Zwecke nützlich, ihn mittels der Konstruktion aus **4.6** zu einem vollständigem Maßraum $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n), \tilde{\lambda})$ zu vervollständigen.

Definition 4.8 $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_n$ heißt das (n-dimensionale) *Lebesgue-Maß*. Bzgl. $\tilde{\lambda}|_A$ integrierbare Funktionen $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ auf $A \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ werden *Lebesgue-integrierbar* genannt[20] und $\int_A f\, d\tilde{\lambda}$ das *Lebesgue-Integral* von f.

Was passiert mit Messbarkeit und Integrierbarkeit beim Übergang zum vervollständigten Maßraum? Zunächst klären wir die Beziehung zwischen messbaren Funktionen auf $(X, \mathcal{S})$ und solchen auf $(X, \tilde{\mathcal{S}})$.

Satz 4.9 *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $(X, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ seine Vervollständigung und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann gilt:*

(a) *Ist $f\colon (X, \mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so auch $f\colon (X, \tilde{\mathcal{S}}) \to \overline{\mathbb{R}}$.*

(b) *Ist $f\colon (X, \tilde{\mathcal{S}}) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so existiert eine messbare Funktion $g\colon (X, \mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f(x) = g(x)$ fast überall.*

[20] In Kapitel 2 hatten wir die Begriffe "Lebesgue-integrierbar" und "Lebesgue-Integral" für beliebige Maße benutzt. Es ist meist aus dem Zusammenhang klar, ob an allgemeine Maße oder wie jetzt nur an das Lebesgue-Maß gedacht ist.

Beweis. (a) Da $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$, ist (a) offensichtlich.

(b)[21] Nach Folgerung 3.5 gibt es eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $s_n\colon X \to \mathbb{R}$ auf $(X, \tilde{\mathcal{S}})$, die punktweise gegen f konvergiert. Hier ist $s_n = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^{(n)} \mathbf{1}_{A_j^{(n)}}$ mit $\alpha_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ und gewissen paarweise disjunkten Mengen $A_j^{(n)} \in \tilde{\mathcal{S}}$. Per Definition von $\tilde{\mathcal{S}}$ finden wir eine Menge $B_j^{(n)} \in \mathcal{S}$ und eine μ-Nullmenge $N_j^{(n)}$ derart, dass $A_j^{(n)} = B_j^{(n)} \cup N_j^{(n)}$. Hierbei ist $N_j^{(n)} \subseteq M_j^{(n)}$ für eine messbare Menge $M_j^{(n)} \in \mathcal{S}$ vom Maß $\mu(M_j^{(n)}) = 0$. Wir setzen nun $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{k_n} M_j^{(n)}$. Dann ist $M \in \mathcal{S}$ als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{S}$, und da jede dieser Mengen das Maß 0 hat, ist auch $\mu(M) = 0$. Wir setzen $E := X \setminus M$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$t_n \;:=\; \mathbf{1}_E \cdot s_n \;=\; \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j^{(n)} \mathbf{1}_{A_j^{(n)} \cap E}$$

eine Stufenfunktion auf $(X, \mathcal{S})$, denn es ist

$$A_j^{(n)} \cap E \;=\; (B_j^{(n)} \cap E) \cup (N_j^{(n)} \cap E) \;=\; B_j^{(n)} \cap E \;\in\; \mathcal{S}\,,$$

da ja $N_j^{(n)} \subseteq M = X \setminus E$. Für alle $x \in E$ gilt $t_n(x) = s_n(x)$ und somit $t_n(x) \to f(x) =: g(x)$. Für $x \in X \setminus E$ ist $t_n(x) = 0$ und daher $(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent, gegen $g(x) := 0$. Als punktweiser Limes messbarer Funktionen auf $(X, \mathcal{S})$ ist $g\colon (X, \mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Da $g|_E = f|_E$ mit $\mu(X \setminus E) = \mu(M) = 0$, ist weiter wie verlangt $f(x) = g(x)$ fast überall. □

Der folgende Satz zeigt, dass sich das Integral einer bzgl. $\mathcal{S}$ messbaren Funktion unverändert bleibt, wenn der Maßraum durch seine Vervollständigung ersetzt wird:

Satz 4.10 *Es seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und $(X, \mathcal{T}, \nu)$ Maßräume mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ und $\mu = \nu|_{\mathcal{S}}$. Dann gilt:*

(a) *Jede bzgl. $\mathcal{S}$ messbare Funktion $f\colon X \to [0, \infty]$ ist auch bzgl. $\mathcal{T}$ messbar, und es ist*

$$\int_X f\, d\mu \;=\; \int_X f\, d\nu\,. \tag{30}$$

(b) *Eine auf $(X, \mathcal{S})$ messbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. μ integrierbar, wenn sie bzgl. $\tilde{\mu}$ integrierbar ist. In diesem Falle gilt* (30).

Beweis. (a) Die Frage der Messbarkeit erledigt man wie in Satz 4.9 (a). Sei nun zunächst $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ eine nicht-negative Stufenfunktion auf $(X, \mathcal{S})$, mit $\alpha_j \in [0, \infty[$ und paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\int_X s\, d\mu \;=\; \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \mu(A_j) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, \tilde{\mu}(A_j) \;=\; \int_X s\, d\tilde{\mu}\,. \tag{31}$$

[21] In der Vorlesung überspringen wir den Beweis von (b).

Ist nun $f : (X, \mathcal{S}) \to [0, \infty]$ eine beliebige nicht-negative messbare Funktion, so liefert Satz 3.4 eine monoton wachsende Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $s_n : X \to [0, \infty[$ auf $(X, \mathcal{S})$, die punktweise gegen f konvergiert. Da jede dieser Stufenfunktionen auch auf $(X, \tilde{\mathcal{S}})$ messbar ist und ihre Integrale bzgl. μ und $\tilde{\mu}$ nach (31) übereinstimmen, erhalten wir mit zweimaliger Anwendung des Satzes über monotone Konvergenz (Satz 3.21):

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\mu \;=\; \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\tilde{\mu} \;=\; \int_X f \, d\tilde{\mu} \,.$$

(b) Folgt direkt aus (a), indem wir f in Positiv- und Negativteil zerlegen. □

Bemerkung 4.11 Obwohl es für manche Zwecke recht bequem ist, einen vollständigen Maßraum vorliegen zu haben, zeigen Satz 4.9 (b), Satz 4.10 und Folgerung 3.18 doch sehr deutlich, dass man beim Übergang zum vervollständigten Maßraum keine wirklich interessanten neuen messbaren oder integrierbaren Funktionen hinzugewinnt: Jede bzgl. $\tilde{\mathcal{S}}$ messbare Funktion f lässt sich nach Abändern auf einer Nullmenge zu einer bzgl. der ursprünglichen σ-Algebra $\mathcal{S}$ messbaren Funktion g machen, und die Integrale bleiben unverändert, wenn f durch g ersetzt wird. Insbesondere gewinnt man also nur wenig an Allgemeinheit hinzu, wenn man mit dem Lebesgue-Maß arbeitet anstelle seiner Einschränkung auf die Borelmengen, dem Lebesgue-Borel-Maß.

Viele der Sachverhalte aus Teil II–V der Vorlesung beweist man natürlicherweise zunächst für das Lebesgue-Borel-Maß und man müsste sich anschließend zusätzliche Mühe machen, sie (meist mit trivialen Argumenten) auf den Fall der vervollständigten Maßräume zu übertragen. Dies wäre recht ermüdend und würde von den Kernideen eher ablenken. Wir verzichten daher darauf und werden stets mit dem nicht vervollständigten Lebesgue-Borel-Maß arbeiten (wie auch Prof. Neeb in seiner Mehrfachintegration im WS 1999/2000).

4.12 Ausblick. Wir skizzieren kurz für Interessierte, warum der Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ mit dem Lebesgue-Borel-Maß λ nicht vollständig ist, wobei wir uns auf den Fall $n = 1$ beschränken.[22] Man nutzt hier wieder die nicht leicht zu beweisende Tatsache aus, dass es nur soviele Borelmengen gibt wie reelle Zahlen, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ hat die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ (siehe Bemerkung 1.16 (b)). Also hat auch die Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ aller Borelmengen A vom Maß $\lambda(A) = 0$ höchstens die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Nehmen wir dies als gegeben hin, ist der Rest nicht schwer:

Nach Beispiel 4.4 ist die Cantormenge C eine Borelmenge von $\mathbb{R}$ vom Maß 0, deren Mächtigkeit mit der von $\mathbb{R}$ übereinstimmt. Also gibt es so viele Teilmengen N von C wie Teilmengen von $\mathbb{R}$, und davon gibt es echt mehr als Elemente von $\mathbb{R}$. Da jede der Teilmengen $A \subseteq C$ eine λ-Nullmenge ist, ist die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{M}$ aller λ-Nullmengen somit echt größer als die Mächtigkeit von $\mathcal{N}$, woraus $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ folgt.

[22]Für $n \geq 2$ gibt es eine einfachere Begründung—siehe Übung!

4.2 Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integral

In diesem Abschnitt vergleichen wir das Riemann-Integral über Intervallen in $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Integral. Die Resultate hängen davon ab, ob wir eigentliche Riemann-Integrale über kompakten Intervallen oder uneigentliche Riemann-Integrale betrachten.

Wir stellen ein simples Hilfsresultat voran (das in der Übung bewiesen wird):

Einschließungskriterium. *Es seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $\phi, f, \psi \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $\phi \leq f \leq \psi$. Sind ϕ und ψ bzgl. μ über X integrierbar, so auch f.* $\square$

Satz 4.13 *Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so ist jede Riemann-integrierbare Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auch über $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int_{[a,b]} f \, d\tilde{\lambda} \;=\; \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Beweis. Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, so gibt es Treppenfunktionen $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{ und } \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

O.B.d.A. können wir die Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als monoton wachsend bzw. fallend voraussetzen (denn andernfalls ersetzen wir φ_n durch $\max(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und ψ_n durch $\min(\psi_1, \ldots, \psi_n)$). Nach den Integraldefinitionen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral für Treppenfunktionen überein. Es gilt daher auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \, d\tilde{\lambda} \;=\; \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{ und } \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n \, d\tilde{\lambda} \;=\; \int_a^b f(x)\, dx\,. \tag{32}$$

Die monotonen Funktionenfolgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren punktweise auf $[a,b]$ gegen messbare Funktionen φ bzw. ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Aus $\varphi_1 \leq \phi \leq \psi \leq \psi_1$ folgt mit dem Einschließungskriterium, dass φ und ψ bzgl. $\tilde{\lambda}$ über $[a,b]$ integrierbar sind. Da $\varphi_n \leq \varphi \leq \psi \leq \psi_n$, gilt

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \, d\tilde{\lambda} \;\leq\; \int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} \;\leq \int_{[a,b]} \psi \, d\tilde{\lambda} \;\leq\; \int_{[a,b]} \psi_n \, d\tilde{\lambda}\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt nun wegen (32):

$$\int_a^b f(x)\, dx \;\leq\; \int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} \;\leq \int_{[a,b]} \psi \, d\tilde{\lambda} \;\leq\; \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Es besteht also Gleichheit: $\int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} = \int_{[a,b]} \psi \, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f(x)\, dx$. Somit $\int_{[a,b]} (\psi - \varphi)\, d\tilde{\lambda} = 0$. Nach Lemma 3.12 (g) ist dann $\varphi(x) = \psi(x)$ fast überall, und wegen $\varphi \leq f \leq \psi$ ist auch

$\varphi(x) = f(x)$ fast überall. Nach Lemma 4.5 und Folgerung 3.18 ist also auch f über $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar, und

$$\int_{[a,b]} f \, d\tilde{\lambda} = \int_{[a,b]} \varphi \, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f \, dx \,. \qquad \square$$

Wir erwähnen ohne Beweis, dass man die Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$ auch durch ihre Stetigkeitseigenschaften charakterisieren kann:

Satz von Lebesgue. *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte eine Lebesguesche Nullmenge ist.* $\square$

Einen Beweis finden Sie z.B. in Prof. Rochs Vorlesungsskript zur Analysis II, Kapitel 8, Satz 8.14; dieses Skript ist frei zugänglich unter der URL

http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Lehrveranstaltungen/Lehrmaterial/SS2002/AnaII .

Die Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist wesentlich größer als die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen. Ein einfaches Beispiel ist die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ der Menge der rationalen Zahlen: Diese Funktion ist Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar.

Es folgt ein Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, die sich (im Gegensatz zu $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$) nicht einmal durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer Riemann-integrierbaren Funktion machen lässt.

Beispiel 4.14 Es sei $Q := \mathbb{Q} \cap \,]0,1[\,$. Diese Menge ist abzählbar: $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Gegeben $\varepsilon \in \,]0,1[$ wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall $U_n \subseteq \,]0,1[$ derart, dass $q_n \in U_n$ und U_n höchstens die Länge $\varepsilon/2^n$ hat. Dann ist

$$Q \subseteq U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \,]0,1[\quad \text{und} \quad \lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \,.$$

Da U offen und folglich eine Borelmenge ist, ist $f = \mathbf{1}_U$ messbar und $\int_{[0,1]} f \, d\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(U) \leq \varepsilon < 1$. Weiter ist U dicht in $[0,1]$, da $Q \subseteq U$. In der Übung prüfen wir nach, dass f tatsächlich die verlangte pathologische Eigenschaft besitzt.

Bei uneigentlichen Riemann-Integralen, die nicht absolut konvergieren, ist die Situation komplizierter. Da die Lebesgue-Integrierbarkeit die absolute Konvergenz des Integrals voraussetzt, können uneigentliche Riemann-Integrale existieren, die man nicht als Lebesgue-Integrale interpretieren kann. Bevor wir ein Beispiel geben, fassen wir diesen Zusammenhang präziser. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 4.15 (Ausschöpfungssatz). *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum, $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Folge messbarer Teilmengen von X mit Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$ und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist bzgl. μ über X integrierbar.*

(b) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f|_{X_n}$ ist bzgl. $\mu|_{X_n}$ über X_n integrierbar und die Folge $\big(\int_{X_n} |f|\, d\mu\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

Ist dies der Fall, so ist

$$\int_X f\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f\, d\mu\,.$$

Beweis. Zunächst erinnern wir daran, dass f nach Satz 1.36 genau dann messbar ist, wenn jede der Einschränkungen $f|_{X_n}$ messbar ist.

(a)$\Rightarrow$(b): Da f bzgl. μ integrierbar ist, ist nach Satz 3.19 auch $|f|$ integrierbar. Nach Satz 3.15 und Lemma 2.4 (b) gilt weiter $\int_{X_n} |f|\, d\mu \le \int_X |f|\, d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b)$\Rightarrow$(a): Dies ist der interessante Teil des Beweises. Zunächst konvergiert die monoton wachsende Folge $(\mathbf{1}_{X_n} \cdot |f|)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $|f|$, so dass $\int_X |f|\, d\mu < \infty$ nach dem Satz über monotone Konvergenz. Weiter ist $|\mathbf{1}_{X_n} f| \le |f|$ und die Funktionen $\mathbf{1}_{X_n} f$ konvergieren punktweise gegen f, so dass wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz die Integrierbarkeit von f und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbf{1}_{X_n} f\, d\mu \;=\; \int_X f\, d\mu$$

erhalten (wobei Lemma 3.14 (b) benutzt wurde). □

Gerüstet mit dem Ausschöpfungssatz wenden wir uns nun uneigentlichen Integralen zu.

Folgerung 4.16 *Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Ist $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von $]a,b[$, so ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$ konvergiert. In diesem Fall gilt $\int_{]a,b[} f\, d\tilde{\lambda} = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Beweis. Wir wählen eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]a,b[$ mit $x_n \to a$ sowie eine monoton wachsende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < y_n < b$ und $y_n \to b$. Setzen wir $X_n := [x_n, y_n]$, so ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \;=\;]a,b[$, und nach dem Ausschöpfungssatz ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} |f|\, d\tilde{\lambda} \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{x_n}^{y_n} |f(x)|\, dx$$

endlich ist. □

Beispiel 4.17 Wir betrachten die Funktion $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin x}{x}$. Wie wir aus der Analysis I oder II wissen, konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral[23]

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx\,. \tag{33}$$

[23]Siehe z.B. Beispiel 3 in § 8.10 im 8. Kapitel von Prof. Rochs Skript zur Analysis II im SS 2002, zu finden unter der auf S. 47 beschriebenen URL.

Jedoch konvergiert das Integral (33) nicht absolut, denn für $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ist $|f(x)| \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}$ und folglich

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\, dx \;\geq\; \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin x|\, dx \;=\; \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x\, dx \;=\; \frac{2}{(k+1)\pi}\,.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe konvergiert $\int_1^\infty |f(x)|\, dx$ also nicht, und nach Folgerung 4.16 ist f *nicht* Lebesgue-integrierbar auf $[1, \infty[$.

4.3 Parameterabhängige Integrale

Der Satz über parameterabhängige Integrale besagt, dass Integrale "stetig von Parametern abhängen" und man "unter dem Integral differenzieren" darf. Beide Aussagen können wir nun unter viel schwächeren Voraussetzungen gewährleisten als früher (im Rahmen der Riemannschen Integrationstheorie).

Satz 4.18 (Parameterabhängige Integrale). *Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Weiter sei $f\colon P \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für jedes $p \in P$ die Funktion*

$${}_pf \;:=\; f(p, \bullet)\colon X \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(p,x)$$

bzgl. μ über X integrierbar ist. Dann hat

$$g\colon P \to \mathbb{R}\,, \quad g(p) \;:=\; \int_X {}_pf\, d\mu \;=\; \int_X f(p,x)\, d\mu(x)$$

die folgenden Eigenschaften:

(a) *Ist $\bar{p} \in P$ derart, dass für jedes $x \in X$ die Funktion $f_x := f(\bullet, x)\colon P \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f(p,x)$ in $\bar{p}$ stetig ist und existiert eine bzgl. μ über X integrierbare Funktion $h\colon X \to [0, \infty]$ derart, dass*

$$|f(p,x)| \;\leq\; h(x) \quad \text{für alle } (p,x) \in P \times X,$$

so ist g in $\bar{p}$ stetig.

(b) *Nun sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $j \in \{1, \dots, n\}$. Hat $f_x : P \to \mathbb{R}$ für jedes $x \in X$ eine stetige partielle Ableitung $D_j f_x = \frac{\partial f_x}{\partial p_j}$ und gibt es eine bzgl. μ über X integrierbare Funktion $h\colon X \to [0, \infty]$ derart, dass*

$$|D_j f_x(p)| \;\leq\; h(x) \quad \text{für alle } (p,x) \in P \times X,$$

so existiert auch $D_j g$, diese Funktion ist stetig, und für alle $p \in P$ ist

$$(D_j g)(p) \;=\; \int_X D_j f(p,x)\, d\mu(x)\,. \tag{34}$$

Beweis. (a) Wir haben zu zeigen, dass $g(p_n) \to g(\bar{p})$ für jede gegen $\bar{p}$ konvergente Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in P. Für festes $x \in X$ gilt

$$_{p_n}f(x) = f(p_n, x) = f_x(p_n) \to f_x(\bar{p}) = f(\bar{p}, x) = {}_{\bar{p}}f(x) \quad \text{für } n \to \infty$$

aufgrund der Stetigkeitsannahme. Also konvergieren die Funktionen $_{p_n}f$ auf X punktweise gegen $_{\bar{p}}f$. Da h nach Voraussetzung eine integrierbare Majorante für die Funktionen $_{p_n}f$ ist, erhalten wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$g(p_n) \;=\; \int_X {}_{p_n}f \; d\mu \;\to\; \int_X {}_{\bar{p}}f \; d\mu \;=\; g(\bar{p})\,.$$

(b) Wir zeigen die Existenz der partiellen Ableitung $D_j g(p)$ an einer gegebenen Stelle $p \in P$. Da P in $\mathbb{R}^n$ offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(p) := \{q \in \mathbb{R}^n \colon \|q - p\|_2 < r\} \subseteq P$. Dann gilt $p + te_j \in P$ für alle $t \in [0, r[$. Gegeben $x \in X$ und $t \in \,]0, r[$ können wir den Mittelwertsatz (aus der Analysis I) anwenden auf die stetig differenzierbare Funktion

$$[0, t] \to \mathbb{R}\,, \quad s \mapsto f(p + se_j, x) = f_x(p + se_j)\,.$$

Es existiert daher ein $\theta_{x,t} \in [0, t]$ derart, dass

$$\frac{1}{t}\,(f(p + te_j, x) - f(p, x)) \;=\; (D_j f)(p + \theta_{x,t}\, e_j, x)\,.$$

Da hier $|(D_j f)(p + \theta_{x,t} e_j, x)| \le h(x)$, erhalten wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0, 1]$ mit $t_n \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{g(p + t_n e_j) - g(p)}{t_n} &= \int_X \frac{f(p + t_n e_j, x) - f(p, x)}{t_n}\, d\mu(x) \\ &= \int_X (D_j f)(p + \theta_{x,t_n} e_j, x)\, d\mu(x) \;\to\; \int_X D_j f(p, x)\, d\mu(x) \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Also existiert die partielle Ableitung $D_j g(p)$ an der Stelle p und ist durch (34) gegeben. Wenden wir Teil (a) auf (34) an, so sehen wir, dass $D_j g$ stetig ist. □

Teil (a) des Satzes (und sein Beweis) bleibt gültig, wenn P ein beliebiger metrischer Raum ist.

4.4 Vorteile des Lebesgue-Integrals

Was sind denn nun die Vorteile des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral?

- Mit dem Lebesgue-Integral können wir allgemeinere Funktionen integrieren als zuvor.
- Für das Lebesgue-Integral können wir viel stärkere Sätze beweisen (Konvergenzsätze, Satz über parameterabhängige Integrale).
- Neben dem Lebesgue-Integral bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ erhalten wir ganz nebenbei eine allgemeine Integrationstheorie, die uns das Integrieren bzgl. beliebiger Maße ermöglicht. Solche allgemeineren Maße und Integrale werden wirklich gebraucht—sowohl in der Reinen Mathematik als auch in den Anwendungen, z.B. in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

5 Weitere Beispiele und zwei Beweisprinzipien

In diesem Kapitel sind einige wichtige Ergänzungen zum bereits behandelten Stoff zusammengestellt. Hierzu gehört u.a. ein weiteres wichtiges Konstruktionsprinzip für Maße (Bildmaße) sowie die genauere Beschreibung der Integrale bzgl. Maßen mit Dichten, Bildmaßen, sowie Reihen von Maßen. Die Beweise dieser Resultate, die mit Anleitung in der Übung durchgeführt wurden, beruhen auf dem sogenannten "Beweisprinzip der Integrationstheorie," in dem sich die vier Schritte der Integraldefinition aus Kapitel 3 widerspiegeln.

Anschließend wird ein zweites wichtiges Beweisprinzip vorgestellt, welches in vielen schwierigen Situationen zu zeigen ermöglicht, dass ein gegebenes Mengensystem eine σ-Algebra ist (in Darmstadt bekannt als das "Prinzip der lieben Mengen"). Als neues technisches Hilfsmittel lernen wir hier sogenannte "Dynkin-Systeme" kennen. Mit einem Beweis der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes illustrieren wir die Nützlichkeit und typische Anwendungsweise des "Prinzips der lieben Mengen." Wir benötigen es auch als Hilfsmittel für das folgende Kapitel.

5.1 Maßkonstruktionen und zugehörige Integrale

Maße mit Dichten wurden in Satz 3.15 eingeführt. Um Integrale bzgl. solcher Maße μ_ρ genauer zu verstehen, benutzen wir das "Beweisprinzip der Integrationstheorie":

Beweisprinzip der Integrationstheorie. Um eine Aussage über Integrale zu beweisen, kann man häufig wie folgt vorgehen:

Schritt 1. Man beweist die Aussage für den Spezialfall, dass der Integrand $f = \mathbf{1}_A$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge A ist.

Schritt 2. Man zeigt die Aussage für nicht-negative Stufenfunktion f.

Schritt 3. Man zeigt die Aussage für nicht-negative messbare Funktionen $f\colon X \to [0,\infty]$.

Hierzu wählt man meist eine monoton wachsende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Stufenfunktionen mit $s_n \to f$ punktweise und versucht dann, mit dem Satz über monotone Konvergenz die Aussage auf Schritt 2 zurückzuführen.

Schritt 4. Schließlich beweist man die Aussage für beliebige integrierbare Funktionen $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ durch Aufspalten in Positiv- und Negativteil, $f = f_+ - f_-$.

In der Tat haben wir diese Methode schon mehrmals verwandt – z.B. im Beweis von Satz 3.15 sowie zum Beweis der Additivität des Integrals (Satz 3.23).

Satz 5.1 (Integration bzgl. Maßen mit Dichten). *Es sei $(X,\mathcal{S},\mu)$ ein Maßraum, $\rho\colon X \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion und $\mu_\rho\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ das durch*

$$\mu_\rho(A) := \int_A \rho \, d\mu \quad \textit{für } A \in \mathcal{S}$$

definierte Maß mit Dichte ρ bzgl. μ (siehe Satz 3.15 (a)). *Dann gilt:*

(a) *Für jede messbare Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ ist*

$$\int_X f\, d\mu_\rho \;=\; \int_X f \cdot \rho\, d\mu\,. \tag{35}$$

(b) *Eine messbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. μ_ρ über X integrierbar, wenn $f \cdot \rho$ bzgl. μ über X integrierbar ist. In diesem Falle gilt wieder* (35).

Beweis. Der Beweis wurde bereits in der Übung geführt. Um das Beweisprinzip der Integrationstheorie zu illustrieren, geben wir den Beweis hier nochmals wieder:

(a) Schritt 1. Es sei $A \in \mathcal{S}$ und $f = \mathbf{1}_A\colon X \to [0,\infty]$ die charakteristische Funktion von A. Nach Schritt 1 der Integraldefinition und Lemma 3.14 (b) ist

$$\int_X \mathbf{1}_A\, d\mu_\rho \;=\; \mu_\rho(A) \;\overset{def}{=}\; \int_A \rho\, d\mu \;\overset{3.14}{=}\; \int_X \mathbf{1}_A \cdot \rho\, d\mu\,;$$

also gilt (35).

Schritt 2. Ist $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit paarweise disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [0,\infty[$, so schließen wir mit Schritt 1 sowie Lemma 3.12 (c) und Satz 3.23 (a):

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\mu_\rho \;&=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \mathbf{1}_{A_j}\, d\mu_\rho \;=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \mathbf{1}_{A_j} \cdot \rho\, d\mu \\ &=\; \int_X \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j} \cdot \rho\, d\mu \;=\; \int_X f \cdot \rho\, d\mu\,.\end{aligned}$$

Schritt 3. Ist nun $f\colon X \to [0,\infty]$ eine beliebige messbare Funktion, so gibt es nach Satz 3.4 eine monoton wachsende Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Stufenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Dann ist $(s_n \cdot \rho)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge nicht-negativer messbarer Funktionen, die punktweise gegen $f \cdot \rho$ konvergiert. Wir schließen

$$\int_X f\, d\mu_\rho \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu_\rho \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \cdot \rho\, d\mu \;=\; \int_X f \cdot \rho\, d\mu\,,$$

wobei der Satz über monotone Konvergenz benutzt wurde, um die erste und dritte Gleichheit zu erhalten, während Schritt 2 die zweite Gleichheit liefert.

(b) Schritt 4. Nach Satz 3.19 und 3.20 ist eine messbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann bzgl. μ_ρ über X integrierbar, wenn

$$\infty \;>\; \int_X |f|\, d\mu_\rho \;\overset{\text{Schritt 3}}{=}\; \int_X |f| \cdot \rho\, d\mu \;=\; \int_X |f\rho|\, d\mu\,.$$

Für das rechte Integral gelesen, ist dies genau die Bedingung für Integrierbarkeit der Funktion $f \cdot \rho$ bzgl. μ über X.

Ist f bzgl. μ_ρ über X integrierbar, so erhalten wir wegen $(f \cdot \rho)_\pm = f_\pm \cdot \rho$:

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu_\rho &\overset{def}{=} \int_X f_+ \, d\mu_\rho - \int_X f_- \, d\mu_\rho \overset{\text{Schritt 3}}{=} \int_X f_+ \cdot \rho \, d\mu - \int_X f_- \cdot \rho \, d\mu \\ &= \int_X f \cdot \rho \, d\mu \,, \end{aligned}$$

was den Beweis vollendet. □

Bemerkung 5.2 Andere übliche Bezeichnungen für μ_ρ sind und $\rho \, \mu$ sowie $\rho \odot \mu$. Besonders suggestiv ist es, formal $\rho \, d\mu$ oder $\rho(x) \, d\mu(x)$ für $d\mu_\rho$ zu schreiben (wobei man dem Buchstaben "*d*" keine eigene Bedeutung zumisst); aus Gleichung (35) wird dann einfach

$$\int_X f \; (\rho \, d\mu) \; = \; \int_X f \cdot \rho \, d\mu \, .$$

Die folgende Definition beschreibt ein wichtiges Konstruktionsprinzip für Maße. Solche Bildmaße werden in der Praxis (insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie) ständig benutzt.

Definition 5.3 (Bildmaße). Sind $(X, \mathcal{S})$ und $(Y, \mathcal{T})$ Messräume, $\phi \colon X \to Y$ eine messbare Funktion und μ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$, so definiert man das *Bildmaß* $\phi_*(\mu)$ auf $(Y, \mathcal{T})$ via

$$\phi_*(\mu) \colon \mathcal{T} \to [0, \infty] \, , \quad \phi_*(\mu)(A) \; := \; \mu(\phi^{-1}(A)) \, .$$

Bemerkung 5.4 (a) In der Übung haben wir nachgeprüft, dass Bildmaße tatsächlich Maße sind. Wir haben auch gezeigt, dass $(\psi \circ \phi)_*(\mu) = \psi_*(\phi_*(\mu))$.

(b) Andere übliche Bezeichnungen für das Bildmaß $\phi_*(\mu)$ sind $\phi(\mu)$ und μ^ϕ.

Beispiel 5.5 Die in Folgerung 2.8 untersuchte Translationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes λ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ bedeutet gerade, dass $(\tau_x)_*(\lambda) = \lambda$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $\tau_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_x(y) := x + y$. Es ist nämlich

$$\tau_x(\lambda)(A) = \lambda(\tau_x^{-1}(A)) = \lambda(A - x) \quad \text{für } \; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

(auf Wunsch ersetze man hier noch x durch $-x$!).

Satz 5.6 (Integration bzgl. Bildmaßen / Allgemeine Transformationsformel). *Es sei* $\phi \colon (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ *eine messbare Abbildung zwischen Messräumen,* μ *ein Maß auf* $(X, \mathcal{S})$ *und* $\phi_*(\mu)$ *das zugehörige Bildmaß auf* $(Y, \mathcal{T})$*. Dann gilt:*

(a) *Für jede messbare Funktion* $f\colon Y \to [0,\infty]$ *auf* $(Y, \mathcal{T})$ *ist*

$$\int_Y f \; d\phi_*(\mu) \;=\; \int_X f \circ \phi \; d\mu \,. \tag{36}$$

(b) *Eine messbare Funktion* $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist genau dann bzgl.* $\phi_*(\mu)$ *über* Y *integrierbar, wenn* $f \circ \phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *bzgl.* μ *über* X *integrierbar ist. In diesem Fall gilt* (36).

Beweis. Die Behauptungen wurden in der Übung mit dem Beweisprinzip der Integrationstheorie nachgewiesen. □

Beispiel 5.7 Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann ist $f_*(\mu)$ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Da $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f$ mit $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) := x$, ist nach der Allgemeinen Transformationsformel $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann bzgl. $f_*(\mu)$ über $\mathbb{R}$ integrierbar, wenn $f = \mathrm{id} \circ f$ bzgl. μ über X integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_X f \; d\mu \;=\; \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \; df_*(\mu) \;=\; \int_{\mathbb{R}} x \; df_*(\mu)(x)\,. \tag{37}$$

Jedes Integral lässt sich also auf ein Integral über $\mathbb{R}$ zurückführen!

Bemerkung 5.8 Voriger Sachverhalt ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie von Nutzen. Dort betrachtet man Maßräume $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ mit $P(\Omega) = 1$ und nennt messbare Funktionen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ "reelle Zufallsvariablen." Man schreibt $P_X := X_*(P)$ für das Bildmaß $X_*(P)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und nennt dieses die "Verteilung" der reellen Zufallsvariablen X. Mit W-theoretischer Notation wird aus (37):

$$E(X) \;:=\; \int_\Omega X \; dP \;=\; \int_{\mathbb{R}} x \; dP_X(x)\,.$$

Schließlich halten wir zur späteren Benutzung im Kapitel über Maße auf Mannigfaltigkeiten noch fest, wie Integrale bzgl. Reihen von Maßen zu den Integralen bzgl. der Summanden in Beziehung stehen:

Satz 5.9 (Integrale bzgl. Reihen von Maßen). *Es sei* $(X, \mathcal{S})$ *ein Messraum und* $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Maßen* μ_j *auf* $(X, \mathcal{S})$*. Dann ist*

$$\mu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]\,, \quad \mu(A) \;:=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(A)$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$*, und es gilt:*

(a) *Für jede nicht-negative messbare Funktion* $f\colon X \to [0,\infty]$ *ist*

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_X f \, d\mu_j \right) \,. \tag{38}$$

(b) *Ist* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *bzgl.* μ *über* X *integrierbar, so ist* f *für jedes* $j \in \mathbb{N}$ *bzgl.* μ_j *über* X *integrierbar und es gilt* (38)*.*

Beweis. Die Behauptungen wurden in der Übung mithilfe des Beweisprinzips der Integrationstheorie nachgeprüft. □

5.2 Dynkin-Systeme und das "Prinzip der lieben Mengen"

Es kommt häufig vor, dass eine σ-Algebra $\mathcal{S}$ sowie eine Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ gegeben ist und man zeigen möchte, dass $\mathcal{D} = \mathcal{S}$. Typischerweise sind hier die Mengen $A \in \mathcal{D}$ Mengen mit einer besonders schönen Eigenschaft, die gerade von Interesse ist ("liebe Mengen"), und man möchte zeigen, dass jede Menge $A \in \mathcal{S}$ diese schöne Eigenschaft hat ("jede Menge ist lieb.") Das im folgende beschriebene Beweisprinzip wird daher (intern, in Darmstadt) gelegentlich das "Prinzip der lieben Mengen" genannt.[24] Die Mengensysteme $\mathcal{D}$, auf die das Beweisprinzip anwendbar ist, sind sogenannte *Dynkin-Systeme*.

Definition 5.10 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Dynkin-System* (auf X), wenn gilt:

D1 $\emptyset \in \mathcal{D}$;

D2 $\mathcal{D}$ ist abgeschlossen unter Komplementen, also $A \in \mathcal{D} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$;

D3 $\mathcal{D}$ ist abgeschlossen unter abzählbaren *disjunkten* Vereinigungen, d.h. für jede Folge $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{D}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Verglichen mit der Definition einer σ-Algebra ist der einzige Unterschied, dass wir in **D3** nur disjunkte Vereinigungen zulassen. Somit ist jede σ-Algebra insbesondere auch ein Dynkin-System. Jedoch braucht ein Dynkin-System keine σ-Algebra zu sein, wie das folgende Beispiel lehrt:

Beispiel 5.11 Es sei X eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl $2n$ von Elementen, wobei $n \geq 2$. Dann ist die Menge $\mathcal{D}$ aller Mengen $A \subseteq X$ mit einer geraden Anzahl von Elementen ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra.

In der Praxis treten Dynkin-Systeme z.B. wie folgt auf:

Lemma 5.12 *Sei* $(X, \mathcal{S})$ *ein Messraum und* μ, ν *Maße auf* $(X, \mathcal{S})$ *mit* $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. *Dann ist*

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{S}\colon \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System auf X*.*

[24] Im professionellen Umgang sollte man das Beweisprinzip eher "Satz über Dynkin-Systeme mit $\cap$-stabilen Erzeugern" nennen.

Beweis. D1: Wegen $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$ ist $\emptyset \in \mathcal{D}$.

D2: Ist $A \in \mathcal{D}$, so gilt $\mu(A) = \nu(A)$ und somit

$$\mu(X \setminus A) \;=\; \mu(X) - \mu(A) \;=\; \nu(X) - \nu(A) \;=\; \nu(X \setminus A)\,,$$

da $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Also ist $X \setminus A \in \mathcal{D}$.

D3: Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt, so gilt $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ für alle n und somit unter Benutzung der σ-Additivität von Maßen

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \;=\; \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\,.$$

Folglich ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. □

Definition 5.13 Wie im Falle von σ-Algebren (Lemma 1.5) sieht man, dass zu jeder Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer Menge X ein kleinstes Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$ existiert, welches $\mathcal{E}$ enthält.[25] $\delta(\mathcal{E})$ wird das *von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System* genannt.

Definition 5.14 Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X wird *Durchschnitts-stabil* genannt (kurz: "$\cap$-stabil"), wenn $A \cap B \in \mathcal{M}$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$.

Lemma 5.15 *Jedes $\cap$-stabile Dynkin-System ist eine σ-Algebra.*

Beweis. Es sei $\mathcal{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System auf X. Wir brauchen nur **S3** nachzuweisen. Dazu sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{D}$; wir haben zu zeigen, dass $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. Wir definieren rekursiv paarweise disjunkte Mengen $B_n \in \mathcal{D}$ mit $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ wie folgt: $B_1 := A_1 \in \mathcal{D}$, $B_2 := A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c \in \mathcal{D}$ (unter Benutzung der $\cap$-Stabilität!) und allgemein

$$B_{n+1} \;:=\; A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k \;=\; A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k \;=\; A_n \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big)^c \in \mathcal{D}\,.$$

Da die Mengen B_n in $\mathcal{D}$ sind und paarweise disjunkt, folgt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$. □

Das "Prinzip der lieben Mengen" besagt, dass jedes von einer $\cap$-stabilen Menge erzeugte Dynkin-System eine σ-Algebra ist.

Satz 5.16 ("Prinzip der lieben Mengen"). *Es sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine $\cap$-stabile Menge von Teilmengen von X. Dann gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$, d.h. das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System stimmt mit der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ-Algebra überein.*

[25] $\delta(\mathcal{E})$ ist also ein Dynkin-System mit $\mathcal{E} \subseteq \delta(\mathcal{E})$, und ist $\mathcal{D}$ irgendein Dynkin-System mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, so folgt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, denn $\sigma(\mathcal{E})$ ist ein Dynkin-System mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Wir wollen zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist; dann ist $\delta(\mathcal{E})$ nach Lemma 5.15 eine σ-Algebra und somit $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Der Beweis wird in zwei Schritten geführt.

I. Wir halten zunächst $A \in \mathcal{E}$ fest und betrachten die Menge

$$\mathcal{D}_A \;:=\; \{B \in \delta(\mathcal{E})\colon B \cap A \in \delta(\mathcal{E})\}\,.$$

Da $\mathcal{E}$ als $\cap$-stabil angenommen ist, gilt dann $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$. Können wir zeigen, dass $\mathcal{D}_A$ ein Dynkin-System ist, so ist also $\mathcal{D}_A = \delta(\mathcal{E})$.

D1: Wegen $A \cap \emptyset = \emptyset \in \delta(\mathcal{E})$ ist $\emptyset \in \mathcal{D}_A$.

D2: Ist $B \in \mathcal{D}_A$, so ist $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$, somit auch $A \cap B^c = A \cap (A^c \cup B^c) = [A^c \cup (A \cap B)]^c \in \delta(\mathcal{E})$ und somit $B^c \in \mathcal{D}_A$.

D3: Sind $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{D}_A$ paarweise disjunkt, so auch die Mengen $A \cap B_n \in \delta(\mathcal{E})$, somit $A \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap B_n) \in \delta(\mathcal{E})$ und somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}_A$.

Also ist $\mathcal{D}_A$ tatsächlich ein Dynkin-System und somit $\mathcal{D}_A = \delta(\mathcal{E})$. Folglich gilt

$$A \cap B \in \delta(\mathcal{E}) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{E} \text{ und alle } B \in \delta(\mathcal{E}). \tag{39}$$

II. Nun betrachten wir $\mathcal{D}_A$ (definiert wie oben) für festes $A \in \delta(\mathcal{E})$. Nach (39) gilt $B \in \mathcal{D}_A$ für alle $B \in \mathcal{E}$ und somit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$. Wie in I. sehen wir, dass $\mathcal{D}_A$ ein Dynkin-System ist. Also gilt $\mathcal{D}_A = \delta(\mathcal{E})$ und somit $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$ für alle $B \in \delta(\mathcal{E})$. Da $A \in \delta(\mathcal{E})$ beliebig war, ist somit $\delta(\mathcal{E})$ als $\cap$-stabil erkannt und somit $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. □

5.3 Beweis der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes

Mithilfe des "Prinzips der lieben Mengen" sind wir nun unter anderem in der Lage, die Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes zu beweisen (die in Satz 2.5 behauptet, aber bisher noch nicht bewiesen wurde).

Satz 5.17 (Eindeutigkeitssatz für endliche Maße). *Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und μ, ν Maße auf X derart, dass $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Gilt $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$ für ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ derart, dass*

$$\mu(A) \;=\; \nu(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{E},$$

so ist $\mu = \nu$.

Beweis. Nach Lemma 5.12 ist

$$\mathcal{D} \;:=\; \{A \in \sigma(\mathcal{E})\colon \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein Dynkin-System. Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ per Voraussetzung, gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$. Da $\mathcal{E}$ per Voraussetzung $\cap$-stabil ist, ist $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Also $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{E})$. □

Obwohl der Eindeutigkeitssatz zunächst nur für endliche Maße formuliert ist, kann man daraus auch Aussagen über nicht notwendig endliche Maße folgern:

Folgerung 5.18 (Eindeutigkeitssatz für $\boldsymbol{\sigma}$-endliche Maße). *Es seien μ, ν Maße auf einem Messraum $(X, \mathcal{S})$ derart, dass $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$ für ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\mu(A) = \nu(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{E}$*;*

(b) *Es existiert eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Mengen $A_n \in \mathcal{E}$ mit $\mu(A_n) = \nu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Dann ist $\mu = \nu$.

Beweis. Wir halten zunächst $n \in \mathbb{N}$ fest. Der in Beispiel 1.35 diskutierte Spezialfall von Lemma 1.34 (b) zeigt, dass $\mathcal{S}|_{A_n}$ durch $\mathcal{E}_n := \{A \cap A_n : A \in \mathcal{E}\}$ erzeugt wird; hierbei ist $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_n$ $\cap$-stabil wegen der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}$. In Anbetracht der Voraussetzungen zeigt also der Eindeutigkeitssatz 5.17, dass $\mu|_{A_n} = \nu|_{A_n}$.

Ist nun $A \in \mathcal{S}$ beliebig, so gilt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ mit geeigneten paarweise disjunkten Mengen $B_n \in \mathcal{S}|_{A_n}$, definiert via $B_1 := A \cap A_1$; $B_{n+1} := (A \cap A_n) \setminus \big(\bigcup_{k=1}^n B_k\big)$. Somit

$$\mu(A) \;=\; \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) \;=\; \sum_{n=1}^\infty \nu(B_n) \;=\; \nu(A)\,.$$ □

Bemerkung 5.19 Die in der Folgerung diskutierten Maße μ und ν sind (nach (b)) *σ-endlich*, d.h. es ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ für eine Folge messbarer Mengen A_n mit $\mu(A_n) < \infty$. Nicht σ-endliche Maße sind durch ihre Werte auf einem $\cap$-stabilen Erzeugendensystem im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt (selbst wenn Sie dort endliche Werte annehmen).

Folgerung 5.20 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und μ, ν Maße auf $(U, \mathcal{B}(U))$ derart, dass*

(a) $\mu(K) < \infty$ *und* $\nu(K) < \infty$*, für jede kompakte Menge* $K \subseteq U$*;*

(b) $\mu([a, b[) = \nu([a, b[)$ *für jeden halboffenen Quader* $[a, b[\subseteq U$*.*

Dann gilt $\mu = \nu$. Insbesondere ist also das Lebesgue-Borel-Maß λ_n durch die Bedingung $\lambda_n(\prod_{k=1}^n [a_k, b_k[) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ eindeutig festgelegt.

Beweis. Es sei $\mathcal{E}$ die Menge aller halboffenen Quader $[a, b[$ in $\mathbb{R}^n$ mit $[a, b[\subseteq U$. Wie im Beweis von Lemma 1.15 (siehe Musterlösung zur Aufgabe H8) sieht man, dass $\mathcal{B}(U) = \sigma(\mathcal{E})$. Weiter zeigt der zitierte Beweis, dass $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ als abzählbare Vereinigung halboffener Quader A_k geschrieben werden kann, deren kompakter Abschluss $\overline{A_k}$ (der entsprechende kompakte Quader) in U enthalten ist.[26] Die Behauptungen sind daher ein Spezialfall von Folgerung 5.18. □

[26] Im Beweis von Teil (a) ist nämlich $x \in [a, b[\subseteq [a, b] \subseteq \,]x - \varepsilon e, x + \varepsilon e[\subseteq U$.

5.4 Eine weitere Ergänzung: L^p-Räume

Für die Allgemeinbildung erwähnen wir noch (ohne Beweis), wie man aus Funktionen auf Maßräumen Banach-Räume gewinnen kann.

Gegeben einen Maßraum $(X, \mathcal{S}, \mu)$ und eine reelle Zahl $p \geq 1$ betrachte man die Menge $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ aller messbaren Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \; < \; \infty \, .$$

Man kann zeigen, dass dann $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ ein Vektorraum ist und dass die Abbildung

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \to [0, \infty[\,, \quad f \mapsto \|f\|_p \, := \, \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p}$$

alle Eigenschaften einer Norm hat mit Ausnahme von $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Um diese Eigenschaft zu erzwingen, setzt man

$$\mathcal{N} \; := \; \{ f \in \mathcal{L}^p(X, \mu) : \|f\|_p = 0 \}$$

und faktorisiert diesen Untervektorraum $\mathcal{N}$ weg, indem man zum Quotientenvektorraum

$$L^p(X, \mu) \; := \; \mathcal{L}^p(X, \mu)/\mathcal{N}$$

übergeht; dessen Elemente sind nun also Nebenklassen $[f] := f + \mathcal{N}$. Man zeigt, dass durch $\| \, [f] \, \|_p := \|f\|_p$ eine Funktion auf $L^p(X, \mu)$ wohldefiniert ist; diese ist wirklich eine Norm und man stellt fest, dass $L^p(X, \mu)$ bzgl. dieser Norm vollständig ist:

Satz 5.21 *Die Räume $(L^p(X, \mu), \| \cdot \|_p)$ sind vollständig, also Banach-Räume.*

Beweis. Den Fall $p = 1$ diskutieren wir in der Übung. Für allgemeines p sei auf die Literatur verwiesen. □

L^p-Räume werden in der Analysis häufig benutzt. Mehr darüber lernen können Sie u.a. in der "Funktionalanalysis."

Teil III: Hilfsmittel zur Integralberechnung

Nachdem wir uns in den ersten beiden Teilen des Skripts mit recht abstrakten Konstruktionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Berechnung konkreter Integrale zu. In Kapitel 6 lernen wir den *Satz von Fubini* kennen, der es erlaubt, Integrale über $\mathbb{R}^n$ auf Integrale über $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Ein weiteres Hilfsmittel bei der Berechnung von Integralen ist die *Transformationsformel* (das mehrdimensionale Gegenstück der Substitutionsregel), mit der wir uns anschließend beschäftigen. In der Praxis ist die Transformationsformel häufig nicht direkt benutzbar, da die Transformationen Singularitäten aufweisen können (z.B. bei Polarkoordinaten). Jedoch liegen diese Singularitäten oft in Nullmengen und beeinflussen daher das Ergebnis einer Integration nicht. Wir diskutieren deswegen in Kapitel 8 einige Methoden zum Nachweis, dass eine Menge eine Nullmenge ist. Anschließend gehen wir auf einige wichtige konkrete Beispiele ein.

6 Das Prinzip von Cavalieri und der Satz von Fubini

Der Satz von Fubini ist eine Folgerung des Prinzips von Cavalieri. Dieses besagt, dass man das Volumen einer messbaren Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ berechnen kann, indem man (anschaulich gesprochen) M in unendlich dünne Schichten niedrigerer Dimension zerschneidet und die Volumina der Schichten aufintegriert ("Salami-Taktik").

Satz 6.1 (Prinzip von Cavalieri). *Für jede Borelmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ gilt:*

(a) *Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist*

$$M_y \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in M\} \tag{40}$$

eine Borelmenge von $\mathbb{R}^n$.

(b) *Die Funktion $h_M : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$, $h_M(y) := \lambda_n(M_y)$ ist messbar.*

(c) *Das Lebesgue-Borel-Maß von M kann mit folgender Formel berechnet werden:*

$$\lambda_{n+m}(M) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y)\, d\lambda_m(y)\,. \tag{41}$$

Beweis. (a) Da die Inklusionsabbildung $j_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $j_y(x) := (x, y)$ stetig ist und somit messbar, ist $M_y = (j_y)^{-1}(M)$ messbar als Urbild einer messbaren Menge.

(b): Aus $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ mit $M_k := M \cap [-k, k[^{\,n+m} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ folgt $h_M(y) = \lambda_n(M_y) = \lim_{k\to\infty} \lambda_n(M_k) = \lim_{k\to\infty} h_{M_k}(y)$. Können wir zeigen, dass jede der Funktionen h_{M_k} messbar ist, so ist auch h_M messbar, nach Satz 1.48. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass $M \subseteq [-k, k[^{\,n+m} =: Q$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$\mathcal{D} \;:=\; \{N \in \mathcal{B}(Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})|_Q :\; h_N \text{ ist messbar}\}\,.$$

Wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{D} = \mathcal{B}(Q)$, so ist $M \in \mathcal{D}$ und somit gilt die Behauptung. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ nach Lemma 1.15 von der Menge $\mathcal{E}$ aller halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}^{n+m}$ erzeugt wird, wird $\mathcal{B}(Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)|_Q$ nach Lemma 1.34 (b) und Beispiel 1.35 von $\mathcal{F} := \{Q \cap A \colon A \in \mathcal{E}\}$ erzeugt, was die Menge aller in Q enthaltenen halboffenen Intervalle ist. Um $\mathcal{D} = \mathcal{B}(Q)$ nachzuweisen, ist also nur zu zeigen: *$\mathcal{D}$ ist eine σ-Algebra auf Q mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$*. Da $\mathcal{F}$ offensichtlich $\cap$-stabil ist, brauchen wir wegen des "Prinzips der lieben Mengen" (Satz 5.16) nur zu zeigen, dass $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ gilt und $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist.

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$: Jedes halboffene Intervall $I \subseteq Q$ ist von der Gestalt $I = A \times B$ für gewisse halboffene Intervalle $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann ist $I_y = A$ falls $y \in B$, $I_y = \emptyset$ falls $y \in \mathbb{R}^m \setminus B$ und somit

$$h_I(y) \;=\; \lambda_n(A) \cdot \mathbf{1}_B^{\mathbb{R}^m}(y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^m. \tag{42}$$

Folglich ist $h_I \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar und somit $I \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System:

D1: Es ist $h_\emptyset = 0$ messbar, somit $\emptyset \in \mathcal{D}$.

D2: Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist $h_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar. Für $y \in \mathbb{R}^m$ gilt $(Q \setminus A)_y = Q_y \setminus A_y$, wobei $Q_y = [-k,k[^n$ falls $y \in [-k,k[^m$, sonst $Q_y = \emptyset$. Folglich ist $h_{Q\setminus A}(y) = \lambda_n(Q_y \setminus A_y) = \lambda_n(Q_y) - \lambda_n(A_y) = (2k)^n \mathbf{1}_{[-k,k[^m}(y) - h_A(y)$. Also ist $h_{Q\setminus A} = (2k)^n \mathbf{1}_{[-k],k[^m} - h_A(y)$ messbar, somit $Q \setminus A \in \mathcal{D}$.

D3: Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{D}$ und $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, so sind für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ die Mengen $(A_j)_y$ paarweise disjunkt und $A_y = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j)_y$. Also

$$h_A(y) \;=\; \lambda_n(A_y) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n((A_j)_y) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}(y)\,. \tag{43}$$

Nach Folgerung 3.25 ist h_A messbar und somit $A \in \mathcal{D}$.

(c) Als Konsequenz von (b) definiert die rechte Seite von (41) eine Funktion

$$\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \to [0,\infty]\,, \qquad \mu(M) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^m} h_M \, d\lambda_m \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y)\, d\lambda_m(y)\,.$$

μ ist ein Maß: Wegen $h_\emptyset = 0$ ist $\mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ und $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, so erhält man wie in (43) $h_A = \sum_{j=1}^\infty h_{A_j}$ und somit $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^\infty h_{A_j}\, d\lambda_m = \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^m} h_{A_j}\, d\lambda_m = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$, wie benötigt.

Für jedes halboffene Intervall $I = A \times B$ mit $A = [a,b[\subseteq \mathbb{R}^n$, $B = [\alpha,\beta[\subseteq \mathbb{R}^m$ erhalten wir mit (42):

$$\mu(I) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(A)\, \mathbf{1}_B^{\mathbb{R}^m}(y)\, d\lambda_m(y) \;=\; \lambda_n(A)\, \lambda_m(B) \;=\; \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \cdot \prod_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) \;=\; \lambda_{n+m}(I)\,.$$

Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.5 (a) liefert nun $\mu = \lambda_{n+m}$. $\square$

Mit dem Cavalierischen Prinzip können wir überprüfen, ob unsere naive Vorstellung aus der Analysis I gerechtfertigt ist, dass das Integral einer nichtnegativen Funktion die Fläche unter dem Funktionsgraphen beschreibt.

Folgerung 6.2 *Für jede messbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ist die Menge*

$$M^f \;:=\; \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : 0 \le t < f(x)\big\}$$

messbar, vom Maße

$$\lambda_{n+1}\big(M^f\big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n\,.$$

Beweis. Die Projektionen $\pi_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\pi_1(x,t) := x$ und $\pi_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi_2(x,t) := t$ sind stetig und somit messbar. Folglich ist $g := f \circ \pi_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g(x,t) = f(x)$ messbar. Nach Folgerung 3.8 ist $H := g - \pi_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x,t) = f(x) - t$ messbar, somit

$$\begin{aligned} M^f &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \, t \ge 0 \text{ und } f(x) - t > 0\} \\ &= \pi_2^{-1}([0,\infty[) \;\cap\; H^{-1}(]0,\infty]) \end{aligned}$$

eine messbare Menge. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$${}_x(M^f) \;:=\; \big\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in M^f\big\} \;=\; [0, f(x)[$$

und daher $\lambda_1({}_x(M^f)) = f(x)$. Mit Satz 6.1 (wobei nun die Rollen von x und y vertauscht sind) folgt $\lambda_{n+1}(M_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1\big({}_x(M^f)\big)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda_n(x)$. $\square$

Beispiel: Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel

Als eine Anwendung wollen wir das Volumen $c_n := \lambda_n(B_n)$ der n-dimensionalen Einheitskugel $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\}$ berechnen. Offenbar ist $c_1 = \lambda_1([-1,1]) = 2$, und vom Schulwissen ausgehend erwarten wir, dass $c_2 = \pi$. Wir gehen nach dem Cavalierischen Prinzip vor und zerschneiden für $n \ge 2$ die Kugel B_n in die Scheiben

$$\begin{aligned} B_{n,s} &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', s) \in B^n\} \\ &= \big\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\|_2 \le \sqrt{1-s^2}\big\} \;=\; \sqrt{1-s^2}\, B_{n-1} \end{aligned}$$

für $s \in [-1,1]$ und $B_{n,s} = \emptyset$ sonst. Mit Folgerung 2.9 und Satz 6.1 erhalten wir

$$c_n \;=\; \int_{[-1,1]} \lambda_{n-1}(B_{n,s})\, d\lambda_1(s) \;=\; \int_{[-1,1]} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1}\, d\lambda_1(s) \;=\; c_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds\,.$$

Definieren wir

$$I_n \;:=\; \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt also

$$c_n \;=\; c_{n-1} \cdot I_n \qquad \text{für } n \geq 2. \tag{44}$$

Kennen wir also die Riemann-Integrale I_n, so können wir die Volumina c_n rekursiv berechnen. Beachten Sie, dass insbesondere

$$I_1 \;=\; \int_{-1}^{1} ds \;=\; 2\,.$$

Mit der Substitution $s(t) = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}]$, folgt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$I_n \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t \; dt \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \; dt\,. \tag{45}$$

Insbesondere ist also

$$I_0 \;=\; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \;=\; \pi\,.$$

Ausgehend von (45) berechnen wir die Integrale I_n für $n \geq 2$ rekursiv mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}
I_n \;&=\; \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cdot \cos t \; dt \\
&=\; (\sin t)(\cos t)^{n-1}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t)(n-1)(\cos t)^{n-2}(-\sin t)\; dt \\
&=\; (n-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^{n-2}\; dt \;=\; (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $n > 1$ die Rekursionsformel $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, und mit den bereits ermittelten Werten $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ finden wir

$$I_{2n} \;=\; \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}\,\pi$$

und

$$I_{2n+1} \;=\; \frac{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3} \cdot 2\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$I_{2n+1}I_{2n} \;=\; \frac{2\pi}{2n+1} \quad \text{und} \quad I_{2n}I_{2n-1} \;=\; \frac{\pi}{n}\,,$$

woraus wir (mit (44))

$$\begin{aligned}
c_{2n} \;&=\; I_{2n}c_{2n-1} \;=\; I_{2n}I_{2n-1}c_{2n-2} \;=\; \frac{\pi}{n}\,c_{2n-2} \;=\; \cdots \;=\; \frac{\pi^{n-1}}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2} c_2 \\
&=\; \frac{\pi^{n-1}}{n!}\, I_2 c_1 \;=\; \frac{\pi^{n-1}}{n!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \;=\; \frac{\pi^n}{n!}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= I_{2n+1}I_{2n}c_{2n-1} = \frac{2\pi}{2n+1}\,c_{2n-1} \\ &= \frac{(2\pi)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}\,c_1 = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n+1)\cdot\ldots\cdot 3} \end{aligned}$$

erhalten. Insbesondere ist also tatsächlich $c_2 = \pi$ und $c_3 = \frac{4}{3}\,\pi$.

Mit Hilfe der Gammafunktion

$$\Gamma\,:\,]0,\infty[\to\mathbb{R}\,,\quad x\mapsto\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

kann man die Formel für die Volumina c_n einheitlich als

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{46}$$

schreiben. Dazu benutzt man die Rekursionsformel $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ (siehe Forster 1, §20, Satz 2) und die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (die wir bald beweisen werden). Mithilfe dieser Formeln sollten Sie (46) leicht bestätigen können.

Bevor wir den Satz von Fubini formulieren und beweisen, klären wir noch, wann ein "Kästchen" in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ messbar ist.

Lemma 6.3 *Für nicht-leere Teilmengen $X\subseteq\mathbb{R}^n$ und $Y\subseteq\mathbb{R}^m$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $X\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *und* $Y\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$*;*

(b) $X\times Y\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$.

Beweis. (a)⇒(b) Sei $X\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $Y\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Da die Projektion $\pi_1:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $\pi_1(x,y) := x$ stetig ist und somit messbar, folgt

$$X\times\mathbb{R}^m = \pi_1^{-1}(X) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)\,.$$

Analog ist $\mathbb{R}^n\times Y\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$. Also $X\times Y = (X\times\mathbb{R}^m)\cap(\mathbb{R}^n\times Y)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$.

(b)⇒(a) Sei nun $X\times Y$ Borelsch. Wähle $x\in X$. Da die Inklusion $i_x\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, $i_x(y) := (x,y)$ stetig und somit messbar ist, folgt

$$Y = i_x^{-1}(X\times Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\,.$$

Analog sehen wir, dass $X\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. □

Satz 6.4 (Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen). *Es sei* $f\colon X\times Y \to [0,\infty]$ *messbar, wobei* $n, m \in \mathbb{N}$ *und* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *sowie* $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *Borelmengen sind. Dann gilt:*

(a) *Für jedes* $y \in Y$ *ist die Funktion*

$$f_y \;:=\; f(\cdot, y) : \, X \to [0,\infty]\,, \quad x \mapsto f(x,y)$$

messbar und für jedes $x \in X$ *ist* ${}_xf := f(x,\cdot) : \, Y \to [0,\infty]$ *messbar.*

(b) *Die Funktionen*

$$F\colon Y \to [0,\infty]\,, \qquad F(y) \;:=\; \int_X f_y \; d\lambda_n \qquad \text{und}$$

$$G\colon X \to [0,\infty]\,, \qquad G(x) \;:=\; \int_Y {}_xf \; d\lambda_m$$

sind messbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \; d\lambda_{n+m} \;&=\; \int_Y \Big(\int_X f(x,y) \; d\lambda_n(x) \Big) \; d\lambda_m(y) \\ &=\; \int_X \Big(\int_Y f(x,y) \; d\lambda_m(y) \Big) \; d\lambda_n(x)\,.\end{aligned} \tag{47}$$

Beweis. Nach Lemma 6.3 ist $X \times Y$ eine Borelmenge. Wenn wir f außerhalb von $X \times Y$ durch 0 fortsetzen, erhalten wir nach Satz 1.36 eine messbare Funktion; da deren Integrale und die von f sich nach Lemma 3.14 (b) nicht unterscheiden, dürfen wir o.B.d.A. $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ annehmen. Dem Beweisprinzip der Integrationstheorie folgend beweisen wir die Behauptungen nun für Funktionen zunehmender Allgemeinheit.

Ist $f = \mathbf{1}_M$ *die charakteristische Funktion einer Borelmenge* $M \subseteq X \times Y$, so gilt $f_y = (\mathbf{1}_M)_y(x) = \mathbf{1}_{M_y}(x)$ mit M_y wie in (40). Nach Satz 6.1 (a) ist also f_y messbar. Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{M_y} \, d\lambda_n = \lambda_n(M_y)$ folgt mit Satz 6.1 nun

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \; d\lambda_{n+m} \;=\; \lambda_{n+m}(M) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y) \; d\lambda_m(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_y \; d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y)\,.$$

Ist $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$ *eine nicht-negative Stufenfunktion*, so ist $f_y = \sum_{j=1}^k \alpha_j (\mathbf{1}_{A_j})_y$. Somit ist $F\colon Y \to [0,\infty]$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n = \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A_j} \, d\lambda_n$ messbar und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \; d\lambda_{n+m} \;&=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathbf{1}_{A_j} \; d\lambda_{n+m} \;=\; \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A_j}(x,y) \; d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y) \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}(x,y) \; d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \; d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y)\,.\end{aligned}$$

Ist f beliebig, so finden wir mit Satz 3.4 eine monoton wachsende Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer Stufenfunktionen $s_k : \mathbb{R}^{n+m} \to [0,\infty[$ mit $s_k \to f$ punktweise. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist dann

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\, d\lambda_{n+m} \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} s_k\, d\lambda_{n+m}\,. \tag{48}$$

Für jedes $y \in Y$ ist andererseits $((s_k)_y)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Funktionenfolge mit punktweisem Grenzwert $f_y = \lim_{k\to\infty}(s_k)_y$. Also ist f_y messbar und nach dem Satz über monotone Konvergenz ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_y\, d\lambda_n \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (s_k)_y\, d\lambda_n\,.$$

Da jede der Funktionen $F_k : Y \to [0,\infty]$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (s_k)_y\; d\lambda_n$ messbar ist, ist auch der punktweise Grenzwert $F\colon Y \to [0,\infty]$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_y\, d\lambda_n$ messbar. Da die Funktionenfolge F_k hierbei monoton wachsend in k ist, liefert der Satz über monotone Konvergenz:

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} f_y\, d\lambda_n\, d\lambda_m(y) \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} (s_k)_y\, d\lambda_n\, d\lambda_m(y)\,. \tag{49}$$

Wegen $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} s_k\; d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n}(s_k)_y\, d\lambda_n d\lambda_m(y)$ folgt die erste Hälfte von (50) durch Vergleich der rechten Seiten von (48) und (49). Die zweite Hälfte zeigt man analog. □

Satz 6.5 (Satz von Fubini für integrierbare Funktionen). *Es sei $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine bzgl. λ_{n+m} über $X \times Y$ integrierbare Funktion, wobei $n, m \in \mathbb{N}$ und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ Borelmengen sind. Dann gilt:*

(a) *Die Mengen*

$$\begin{aligned} X_0 &:= \{x \in X : {}_xf \text{ ist bzgl. } \lambda_m \text{ über } Y \text{ integrierbar}\} \quad \text{und} \\ Y_0 &:= \{y \in Y : f_y \text{ ist bzgl. } \lambda_n \text{ über } X \text{ integrierbar}\} \end{aligned}$$

sind Borelsche Mengen mit $\lambda_n(X \setminus X_0) = \lambda_m(Y \setminus Y_0) = 0$; es ist also ${}_xf$ für fast alle $x \in X$ bzgl. λ_m über Y und f_y für fast alle $y \in Y$ bzgl. λ_n über X integrierbar.

(b) *Die Funktionen*

$$\begin{aligned} F\colon Y_0 \to \mathbb{R}\,, \qquad F(y) &:= \int_X f_y\, d\lambda_n \qquad \text{und} \\ G\colon X_0 \to \mathbb{R}\,, \qquad G(x) &:= \int_Y {}_xf\; d\lambda_m \end{aligned}$$

sind integrierbar, und es gilt

$$\int_{X\times Y} f\, d\lambda_{n+m} \;=\; \int_{Y_0} F\, d\lambda_m \;=\; \int_{X_0} G\, d\lambda_n\,. \tag{50}$$

Beweis. Mit dem bereits bewiesenen Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen erhalten wir nach Aufspaltung in Positiv- und Negativteil:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\lambda_{n+m} &= \int_{X\times Y} f_+\, d\lambda_{n+m} - \int_{X\times Y} f_-\, d\lambda_{n+m}\\ &= \int_Y \underbrace{\left(\int_X (f_+)_y\, d\lambda_n\right)}_{=:\,g(y)} d\lambda_m(y) - \int_Y \underbrace{\left(\int_X (f_-)_y\, d\lambda_n\right)}_{=:\,h(y)} d\lambda_m(y)\\ &= \int_Y g\, d\lambda_m - \int_Y h\, d\lambda_m\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Beachten Sie, dass wir die beiden Integrale in (51) nicht ohne weiteres zu einem Integral zusammenfassen können, denn es könnte ja $g(y) = h(y) = \infty$ sein, so dass undefinierte Ausdrücke der Form "$\infty - \infty$" auftreten würden. Da $\int_Y g\, d\lambda_m < \infty$ und $\int_Y h\, d\lambda_m < \infty$, müssen die Funktionen g und h jedoch fast überall endlich sein (siehe Lemma 3.12 (f)). Also ist

$$Y \setminus Y_0 \;=\; g^{-1}(\{\infty\}) \cup h^{-1}(\{\infty\})$$

eine messbare Menge mit $\lambda_m(Y \setminus Y_0) = 0$. Da man messbare Mengen vom Maß 0 beim Integrieren weglassen darf, können wir (51) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\lambda_{n+m} &= \int_{Y_0} g\, d\lambda_m - \int_{Y_0} h\, d\lambda_m = \int_{Y_0} (g-h)\, d\lambda_m\\ &= \int_{Y_0}\left(\int_X f_y\, d\lambda_n\right) d\lambda_m(y) = \int_{Y_0} F\, d\lambda_m\,.\end{aligned}$$

Die übrigen Aussagen erhält man durch Vertauschen der Rollen von x und y. □

Bemerkung 6.6 Setzt man die Funktion F durch $F(y) := 0$ für $y \in Y \setminus Y_0$ zu einer Funktion $F\colon Y \to \mathbb{R}$ fort,[27] so ist F messbar und wir erhalten einfach

$$\int_{X\times Y} f\, d\lambda_{n+m} = \int_Y F\, d\lambda_m\,.$$

Es kann tatsächlich vorkommen, dass Y_0 eine echte Teilmenge von Y ist.

Beispiel 6.7 Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\quad f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y = 0 \text{ und } x \geq 0;\\ -1 & \text{falls } y = 0 \text{ und } x < 0;\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Da $f_y = \mathbf{1}_{[0,\infty[} - \mathbf{1}_{]-\infty,0[}$ für $y = 0$ mit $\int_{\mathbb{R}} (f_0)_\pm\, d\lambda_1 = \infty$, ist $\int_{\mathbb{R}} f_0\, d\lambda_1$ nicht definiert. Es ist $Y_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda_2 = \int_{Y_0}\int_{\mathbb{R}} f_y\, d\lambda_1\, d\lambda_1(y) = 0$$

(da $f_y = 0$ für $y \neq 0$).

[27] Statt durch 0 darf man F hier sogar ganz beliebig fortsetzen, solange die Fortsetzung nur messbar ist.

7 Die Transformationsformel

In diesem Abschnitt lernen wir das Analogon der eindimensionalen Substitutionsregel kennen, die wir zunächst noch einmal anschauen. Ist $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare und monoton wachsende Funktion und ist $f\colon \phi([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_a^b (f \circ \phi)(t)\, \phi'(t)\; dt \;=\; \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\; dx$$

bzw., als Lebesgue-Integral geschrieben,

$$\int_{[a,b]} (f \circ \phi)(t)\, \phi'(t)\; dt \;=\; \int_{\phi([a,b])} f(x)\; dx\,.$$

Ist dagegen ϕ monoton fallend, d.h. orientierungsumkehrend, so ist

$$\int_a^b (f \circ \phi)(t)\, \phi'(t)\; dt \;=\; \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx \;=\; -\int_{\phi(b)}^{\phi(a)} f(x)\, dx \;=\; -\int_{\phi([a,b])} f(x)\, dx\,.$$

Da hier stets $\phi'(t) \geq 0$ (bzw. $\phi'(t) \leq 0$) wegen der Monotonie, lassen sich die beiden Identitäten zusammenfassen zu

$$\int_{[a,b]} (f \circ \phi)(t)\, |\phi'(t)|\; dt \;=\; \int_{\phi([a,b])} f(x)\; dx\,; \tag{52}$$

das ist die Transformationsformel, die wir auf höherdimensionale Situationen verallgemeinern wollen. Wir werden (wie bereits in den vorigen Formeln) auch die Schreibweise $\int_B f(x)\, dx$ statt $\int_B f\, d\lambda$ verwenden.

Wir erinnern an die Definition eines Diffeomorphismus:

Definition 7.1 Eine bijektive Abbildung $\phi\colon U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn ϕ und ϕ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Satz 7.2 (Transformationsformel). *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ_n über V integrierbar, wenn die Funktion $U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\phi(x))\, |\det \phi'(x)|$ über U integrierbar ist. In diesem Fall (und auch in dem Fall, wenn f nicht-negativ und messbar ist) gilt*

$$\int_V f(y)\; dy \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\; |\det \phi'(x)|\; dx\,. \tag{53}$$

Insbesondere ist

$$\lambda_n\big(\phi(A)\big) \;=\; \int_A |\det \phi'(x)|\; dx \qquad \textit{für jede Borelmenge } A \in \mathcal{B}(U). \tag{54}$$

Man beachte, dass (54) tatsächlich aus (53) folgt, wenn wir $f = \mathbf{1}_{\phi(A)} \colon V \to [0, \infty[$ wählen, da $\mathbf{1}_{\phi(A)}(\phi(x)) = \mathbf{1}_A(x)$.

Hier steht $\phi'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für die Ableitung von $\phi : U \to V$ in $x \in U$. Vor dem Beweis von Satz 7.2 machen wir uns klar, was die Transformationsformel bedeutet. Der wesentliche Teil ist Formel (54), die angibt, wie sich das Volumen des Bildes einer messbaren Menge A unter ϕ berechnet. Ist insbesondere $|\det \phi'(x)|$ eine von x unabhängige Konstante c, so reduziert sich (54) auf $\lambda_n(\phi(A)) = c\,\lambda_n(A)$. Die Konstante c ist also ein Verzerrungsfaktor, der angibt, wie sich das Volumen einer Menge bei Anwendung von ϕ ändert. Ist beispielsweise $\phi = T\big|_U$ mit einer linearen Abbildung $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so ist $\phi'(x) = T$ und somit $\lambda_n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_n(A)$. Für $U = \mathbb{R}^n$ und $A = [0,1]^n$ (Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$) ergibt sich mit

$$\lambda_n\Big(T([0,1]^n)\Big) = |\det T|$$

eine anschauliche Bedeutung (des Betrags) der Determinante als Volumen des Bildes des Einheitswürfels. Eine Menge der Gestalt $T([0,1]^n)$ heißt auch *Spat* oder *Parallelotop*. Man kann sie schreiben als $\{\sum_{j=1}^n x_j a_j \,:\, x_j \in [0,1] \text{ für alle } j\}$, wobei die a_j die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter T sind.

Beweis der Transformationsformel. 1. Schritt: *Es genügt,* (54) *zu beweisen.* Die linke Seite von (53) können wir nämlich mithilfe der Allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.6) umschreiben als ein Integral bzgl. des Bildmaßes $(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)$:

$$\int_V f \, d\lambda_n|_V \;=\; \int_V f \circ \phi \circ \phi^{-1} \, d\lambda_n|_V \;=\; \int_U f \circ \phi \; d(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)\,, \tag{55}$$

wobei jeder der jeweiligen Integranden genau dann integrierbar ist, wenn die anderen es auch sind. Andererseits ist aufgrund des Satzes über Integration bzgl. Maßen mit Dichten (Satz 5.1) der Integrand auf der rechten Seite von (53) genau dann integrierbar, wenn $f \circ \phi$ bzgl. des Maßes $|\det \phi'(x)|\, d\lambda_n|_U(x)$ mit Dichte $|\det \phi'(x)|$ bzgl. $\lambda_n|_U$ integrierbar ist, und in diesem Falle gilt

$$\int_U f\Big(\phi(x)\Big)\, |\det \phi'(x)| \, d\lambda_n|_U(x) \;=\; \int_U f\Big(\phi(x)\Big) \, \Big(|\det \phi'(x)| \, d\lambda_n|_U(x)\Big)\,. \tag{56}$$

Gleichung (54) bedeutet, dass das Bildmaß $(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V)$ mit dem Maß $|\det \phi'(x)|\, d\lambda_n|_U(x)$ übereinstimmt. Ist dies der Fall, so wird in den Integralen auf der rechten Seite von (55) bzw. (56) die gleiche Funktion bzgl. des gleichen Maßes integriert: Die Integrale sind daher gleich, wann immer sie existieren.

2. Schritt: *Es genügt zu zeigen, dass jeder Punkt $p \in U$ eine offene Umgebung $W_p \subseteq U$ hat, so dass* (54) *für W_p anstelle von U und für $\phi\big|_{W_p}$ anstelle von ϕ gilt.*

Für jeden Punkt $p \in U$ gibt es einen Punkt $q \in \mathbb{Q}^n$ und eine offene Kugel $B_r(q)$ mit rationalem Radius derart, dass $p \in B_r(q) \subseteq W_p$. Die Behauptung (54) gilt für jede der abzählbar vielen Mengen $B_r(q)$, und diese Mengen überdecken U. Wir haben also abzählbar viele Mengen $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gefunden, für die (54) gilt und die U überdecken. Ist nun $A \subseteq U$ messbar, so schreiben wir A als disjunkte Vereinigung der Mengen

$$A_1 \;:=\; A\cap M_1 \quad \text{und} \quad A_k \;:=\; (A\cap M_k)\setminus (M_1\cup\cdots\cup M_{k-1}) \quad \text{für } k\geq 2\,.$$

Aufgrund der σ-Additivität von λ_n und Satz 3.15 folgt nun

$$\lambda_n\Big(\phi(A)\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n\Big(\phi(A_k)\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |\det \phi'(x)|\; dx \;=\; \int_A |\det\phi'(x)|\; dx\,.$$

3. Schritt: (54) *gilt, wenn* $U=V=\mathbb{R}^n$ *und* $\phi\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *eine Permutation der Koordinaten ist, wenn also* $\phi(x)=(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ *mit einer Bijektion* $\sigma\colon\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$.

In diesem Fall ist $|\det\phi'(x)|=1$, und (54) gilt offenbar für alle Quader in $\mathbb{R}^n$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel-Maßes (Satz 2.5 (a) oder Folg. 5.20) gilt also (54).

4. Schritt: (54) *gilt, falls* $n=1$ *ist, wenn also* U *und* V *offene Teilmengen von* $\mathbb{R}$ *sind.*

Ist $A\subseteq U$ ein kompaktes Intervall, so ist auch $\phi(A)\subseteq V$ ein kompaktes Intervall (da ϕ stetig ist). Anwendung der Substitutionsregel (52) auf die Funktion $f\equiv 1$ (für das letzte Gleichheitszeichen) liefert nun

$$(\phi^{-1})_*(\lambda_1|_V)(A) \;=\; \lambda_1(\phi(A)) \;=\; \int_{\phi(A)} 1\; dx \;=\; \int_A |\phi'(x)|\; dx\,.$$

Also stimmen die Maße $(\phi^{-1})_*(\lambda_1|_V)$ und $|\phi'(x)|\, d\lambda_1|_U(x)$ auf dem Messraum $(U,\mathcal{B}(U))$ auf allen kompakten Intervallen $A\subseteq U$ überein (und sind dort endlich!). Wie im Beweis von Folgerung 5.20 sieht man nun, dass die Maße übereinstimmen, d.h. es gilt (54).[28]

5. Schritt: *Gilt* (54) *für die Diffeomorphismen* $\phi\colon U\to V$ *und* $\psi\colon V\to W$*, so gilt* (54) *auch für den Diffeomorphismus* $\psi\circ\phi\colon U\to W$.

Aus Schritt 1 wissen wir, dass (54) die Formel (53) nach sich zieht. Nach der Kettenregel ist nun

$$\det\Big((\psi\circ\phi)'(x)\Big) \;=\; \det\Big(\psi'(\phi(x))\circ\phi'(x)\Big) \;=\; \det\Big(\psi'(\phi(x))\Big)\cdot \det\phi'(x)\,. \tag{57}$$

Wenden wir (54) auf ψ und (53) auf ϕ an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_n\Big((\psi\circ\phi)(A)\Big) \;&=\; \int_{\phi(A)} |\det\psi'(y)|\; dy && \text{(nach (54))}\\
&=\; \int_A \Big|\det\psi'\Big(\phi(x)\Big)\Big|\cdot\Big|\det\phi'(x)\Big|\; dx && \text{(nach (53))}\\
&=\; \int_A |\det(\psi\circ\phi)'(x)|\; dx && \text{(nach (57)).}
\end{aligned}$$

[28] Hätten wir hier halboffene Intervalle genommen, hätten wir uns auch auf Satz 2.5 (b) berufen können.

6. Schritt. *Wir zeigen die lokale Aussage aus Schritt* 2 *durch Induktion nach* n.

Der Induktionsanfang $n = 1$ ist in Schritt 4 abgehandelt. Sei also $n \geq 2$ und $p \in U$. Ziel des Induktionsschritts ist es, zu zeigen, dass (54) gültig ist, wenn wir dort U durch eine (eventuell kleinere) offene Umgebung von p ersetzen. Wegen $\det \phi'(p) \neq 0$ gibt es ein j mit $\frac{\partial \phi_n}{\partial x_j}(p) \neq 0$, wobei $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Indem wir ϕ mit einer Koordinatenpermutation verknüpfen, dürfen wir nach Schritt 3 und 5 o.B.d.A. annehmen, dass $j = n$ ist, also

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(p) \; \neq \; 0 \, .$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\psi \colon U \to \mathbb{R}^n \, , \qquad \psi(x) \; := \; \Big(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \phi_n(x) \Big) \, .$$

Die Jacobi-Matrix von ψ in x (d.h. die Matrix von $\psi'(x)$ bzgl. der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$) hat die Blockstruktur

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & 0 \\ * & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} ,$$

ist also insbesondere für $x = p$ invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Forster, Analysis II, §8, Satz 3) dürfen wir nach einer gegebenenfalls erforderlichen Verkleinerung von U annehmen, dass $\psi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $\psi \colon U \to \psi(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir haben damit eine Zerlegung

$$\phi \; = \; \rho \circ \psi : U \to V \quad \text{mit} \quad \rho \; := \; \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to V \, .$$

Die $n$te Komponente von ρ ist dann gegeben durch

$$\rho_n(y) \; = \; (\phi_n \circ \psi^{-1})(y) \; = \; (\psi_n \circ \psi^{-1})(y) \; = \; y_n \, .$$

Nach Schritt 5 genügt es, die Behauptung für die Abbildungen ψ und ρ zu zeigen. Wir dürfen jetzt also annehmen, dass ϕ eine der Abbildungen ψ oder ρ ist. Somit gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass $\phi_j(x) = x_j$ für alle $x \in U$ (denn ψ und ρ besitzen diese Eigenschaft). Indem wir wieder geeignet permutieren, dürfen wir nach Schritt 3 sogar

$$\phi_n(x) \; = \; x_n \qquad \text{für alle } x \in U \tag{58}$$

annehmen. Dann ist also

$$\phi(x) \; = \; (\theta(x), x_n)$$

mit $\theta := (\phi_1, \dots, \phi_{n-1}) \colon U \to \mathbb{R}^{n-1}$. Nach Verkleinern von U können wir weiter erreichen, dass $U = W \times I$ für ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Mit den Notationen

$$V_t \; := \; \{ y \in \mathbb{R}^{n-1} \colon (y,t) \in V \} \quad \text{und} \quad \theta_t \colon W \to V_t \, , \quad \theta_t(y) := \theta(y,t)$$

für $t \in I$ (wie im vorigen Kapitel) können wir ϕ nun wie folgt schreiben:

$$\phi(w,t) \;=\; \Big(\theta_t(w),t\Big) \quad \text{mit} \quad (w,t) \in W \times I\,. \tag{59}$$

Wegen (59) hat die Jacobi-Matrix $J_x(\phi)$ von ϕ in $x = (w,t)$ die Struktur

$$J_x(\phi) \;=\; \begin{pmatrix} J_w(\theta_t) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

somit gilt

$$\det \phi'(x) \;=\; \det{(\theta_t)'(w)}\,. \tag{60}$$

Insbesondere ist also $\det{(\theta_t)'(w)} \neq 0$ für alle $w \in W$ und $t \in I$; da $\theta_t : W \to V_t$ per Konstruktion eine Bijektion ist, folgt daher mit dem Satz über die Umkehrfunktion, dass θ_t für jedes $t \in I$ ein Diffeomorphismus ist.

Für eine messbare Teilmenge A von $U = W \times I$ erhalten wir nun schrittweise

$$\begin{aligned}
\lambda_n\Big(\phi(A)\Big) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}\Big(\phi(A)_t\Big)\,dt \;=\; \int_I \lambda_{n-1}\Big(\phi(A)_t\Big)\,dt && \text{(Cavalieri)} \\
&=\; \int_I \lambda_{n-1}\Big(\theta_t(A_t)\Big)\,dt && \text{(Definition von } \theta_t) \\
&=\; \int_I \int_{A_t} |\det{(\theta_t)'(w)}|\,dw\,dt && \text{(Induktionsannahme)} \\
&=\; \int_I \int_W \underbrace{\mathbf{1}^W_{A_t}(w)}_{=\mathbf{1}^U_A(w,t)}\,|\det \phi'(w,t)|\,dw\,dt && \text{(wegen (60))} \\
&=\; \int_{W\times I} \mathbf{1}^U_A(x)\,|\det \phi'(x)|\,dx && \text{(Fubini)} \\
&=\; \int_A |\det \phi'(x)|\,dx\,.
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

Bemerkung 7.3 Wie im ersten Schritt des Beweises der Transformationsformel festgestellt wurde, bedeutet Formel (54), dass das Bildmaß

$$(\phi^{-1})_*(\lambda_n|_V) \quad \text{mit dem Maß} \quad |\det \phi'(x)|\,d\lambda_n|_U(x)$$

(mit Dichte bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes) übereinstimmt. Aus beweistechnischer Sicht ist diese Aussage der eigentliche Kern der Transformationsformel, und sie zu beweisen die eigentliche Schwierigkeit. Wie in Schritt 1 erklärt, folgt der Rest dann sofort aus der "Allgemeinen Transformationsformel" (die zwar tatsächlich in "allgemeineren" Situationen anwendbar ist, aber weniger konkret ist und daher gar nicht schwer zu beweisen war !).

Wir halten noch eine wichtige Folgerung fest. Ist $T \in L(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie (d.h. wird T durch eine orthogonale Matrix dargestellt), so nennt man T eine *Drehung* des $\mathbb{R}^n$.

Folgerung 7.4 (Rotationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes). *Für jede Drehung T des $\mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda_n(T(A)) = \lambda_n(A)$.*

Beweis. Für die T entsprechende Matrix M und ihre transponierte Matrix gilt $MM^t = I$. Also ist $(\det M)^2 = \det M \det M^t = \det MM^t = 1$ und daher auch $(\det T)^2 = 1$. Also ist $|\det T| = 1$, und die Behauptung folgt aus (54). $\square$

Bemerkung 7.5 Die in Folgerung 7.4 festgestellte Rotationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes ist nicht von vornherein klar, da wir ja das Lebesgue-Borel-Maß basisabhängig definiert haben (nämlich anhand seiner Werte auf Quadern, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen). Da das Lebesgue-Borel-Maß nach Folgerung 2.8 auch invariant unter Translationen ist, können wir zusammenfassend feststellen, dass das Lebesgue-Borel-Maß unter allen Abbildungen der Gestalt $\phi(x) = Tx + v$ mit einer linearen Isometrie $T \in L(\mathbb{R}^n)$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ invariant ist.

8 Beispiele von Koordinatentransformationen

Wir diskutieren nun diejenigen Koordinatentransformationen, die in der Praxis wirklich gebraucht werden (ebene und räumliche Polarkoordinaten sowie Zylinderkoordinaten).

Ist der Integrand eines Mehrfachintegrals eine rotationssymmetrische Funktion (bzw. invariant unter Rotationen um die z-Achse), so lassen sich Integralberechnungen durch Übergang zu Polar- bzw. Zylinderkoordinaten häufig stark vereinfachen.

Um die Transformationsformel in den genannten Spezialfällen (und allgemeineren Situationen) anwenden zu können, muss man meist aus dem Integrationsgebiet zunächst gewisse Nullmengen herausschneiden, um die Koordinaten-Transformation zu einem Diffeomorphismus zu machen. Wir beschäftigen uns daher in diesem Kapitel zunächst mit einigen Kriterien, die es uns in den für die Praxis relevanten Situationen erlauben, gewisse Mengen als Nullmengen zu erkennen.

8.1 Erkennen von Nullmengen

Man kann häufig eine Nullmenge mithilfe des folgenden Satzes als solche erkennen.

Satz 8.1 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge und $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, so ist auch $f(A)$ eine λ_n-Nullmenge.*

Beweis. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von halboffenen Würfeln mit $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) < \varepsilon$, da A eine λ_n-Nullmenge ist. Wir dürfen annehmen, dass jeder Würfel W_k einen Punkt $a_k \in A$ enthält. Ist s_k die Kantenlänge von W_k, so ist $\lambda_n(W_k) = s_k^n$ und $\|x - a_k\| \le s_k\sqrt{n}$ (= Länge der Diagonalen), für alle $x \in W_k$. Da f Lipschitzstetig ist, gibt es ein $L > 0$ derart, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \;\le\; L\,\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in A.$$

Insbesondere ist für alle $x \in A \cap W_k$

$$\|f(x) - f(a_k)\| \;\le\; L\,\|x - a_k\| \;\le\; Ls_k\sqrt{n}\,.$$

Also liegt $f(A \cap W_k)$ in einer Kugel vom Radius $Ls_k\sqrt{n}$ und damit auch in einem Würfel $\widetilde{W}_k$ mit der Kantenlänge $2Ls_k\sqrt{n}$. Es ist also

$$f(A) \;=\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(A \cap W_k) \;\subseteq\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{W}_k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\widetilde{W}_k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (2Ls_k\sqrt{n})^n \;=\; (2L\sqrt{n})^n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) \;\le\; (2L\sqrt{n}\,)^n \cdot \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $f(A)$ eine Nullmenge. □

Folgerung 8.2 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine λ_n-Nullmenge, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ und $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist auch $f(A)$ eine λ_n-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Da U offen ist, ist U eine abzählbare Vereinigung von kompakten Quadern der Gestalt $Q_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{Q}^n$ (vgl. Musterlösung zur Aufgabe H8). Als stetige Funktion ist $f': U \to L(\mathbb{R}^n)$ auf jedem der kompakten Quader Q_k beschränkt, d.h. es gibt ein $L_k > 0$ mit $\|f'(x)\| \leq L_k$ für alle $x \in Q_k$. Mit dem Mittelwertsatz (Forster, Analysis 2, §52, Satz 5) erhalten wir [29]

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(z)\| &= \left\| \int_0^1 f'(z + t(y-z)).(y-z)\, dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|f'(z+t(y-z))\| \cdot \|y-z\|\, dt \;\leq\; L_k \|y-z\| \end{aligned}$$

für alle $y, z \in Q_k$. Also ist $f\big|_{Q_k}$ Lipschitzstetig, und nach Satz 8.1 ist $f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge. Somit ist auch $f(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge (siehe Aufgabe G23 (b)). □

Satz 8.1 und Folgerung 8.2 lassen sich *nicht* auf beliebige stetige Funktionen f verallgemeinern. Beispielweise gibt es Kurven, die ein ganzes Quadrat im $\mathbb{R}^2$ ausfüllen (sogenannte *Peano-Kurven*).

Lemma 8.3 *Jeder echte affine Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine λ_n-Nullmenge.*

Beweis. Da Verschieben einer Borelmenge deren Lebesgue-Borel-Maß nicht ändert (Folgerung 2.8), dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $0 \in A$ gilt. Nach Ausführen einer geeigneten Drehung (die nach Folgerung 7.4 ebenfalls das Maß unverändert lässt) dürfen wir annehmen, dass $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Es genügt daher, zu zeigen, dass $B := \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine Nullmenge ist. Nach dem Prinzip von Cavalieri ist jedoch

$$\lambda_n(B) \;=\; \int_{\{0\}} \lambda_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})\, d\lambda_1 \;=\; \lambda_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \cdot \lambda_1(\{0\}) \;=\; \infty \cdot 0 \;=\; 0\,.$$ □

Eine nützliche Konsequenz ist der folgende Satz, der es häufig ermöglicht, Teilmengen "kleinerer Dimension" als Nullmengen zu erkennen.

Satz 8.4 (Erkennen von Nullmengen). *Sind $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ und $f: U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$, so ist $f(U)$ eine Borelmenge in $\mathbb{R}^n$ vom Maß $\lambda_n(f(U)) = 0$.*

Beweis. Die offene Menge U lässt sich durch eine Folge $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ kompakter Mengen K_j überdecken, $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ (man nehme z.B. geeignete kompakte Quader mit Eckpunkten in

[29] Der folgende Sachverhalt ist auch als "Satz vom endlichen Zuwachs" bekannt.

$\mathbb{Q}^k$). Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist dann $f(K_j)$ kompakt, somit abgeschlossen und somit eines Borelmenge. Folglich ist auch

$$f(U) \;=\; f\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j\Big) \;=\; \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(K_j) \;\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Wir benutzen nun, dass

$$h\colon U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n\,, \qquad h(x,y) \;:=\; f(x)$$

stetig differenzierbar ist und $U\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^k\times\{0\}$ (nach Lemma 8.3) eine λ_n-Nullmenge. Nach Folgerung 8.2 ist somit $f(U) = h(U \times \{0\})$ eine λ_n-Nullmenge und somit $\lambda_n(f(U)) = 0$, weil ja $f(U)$ zudem eine messbare Menge ist. □

Satz 8.5 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge und $f\colon A \to \mathbb{R}$ messbar, so ist der Graph*

$$\Gamma(f) \;:=\; \Big\{(x, f(x))\colon x \in A\Big\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \tag{61}$$

eine Borelmenge vom Maß $\lambda_{n+1}\big(\Gamma(f)\big) = 0$.

Beweis. Wir setzen f durch 0 zu einer Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fort. Als stückweise messbare Funktion ist g messbar (Satz 1.36). Da $\Gamma(f) = \Gamma(g)\cap(A\times\mathbb{R}) \subseteq \Gamma(g)$, wobei $A\times\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ nach Lemma 6.3 eine Borelmenge ist, brauchen wir nur zu zeigen, dass $\Gamma(g)$ eine Borelmenge vom Maß 0 ist. Die Formel

$$\Gamma(g) \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y - g(x) = 0\}$$

zeigt, dass $\Gamma(g)$ die Nullstellenmenge einer messbaren Funktion und somit eine Borelmenge ist. Mit dem Cavalierischen Prinzip erhalten wir nun

$$\lambda_{n+1}\Big(\Gamma(g)\Big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1\Big(\{g(x)\}\Big)\, d\lambda_n(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} 0\, d\lambda_n \;=\; 0\,.$$

□

8.2 Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten

Oft lassen sich vorhandene Symmetrien dadurch ausnutzen, dass man Integrationsbereiche durch Koordinatentransformationen (d.h. durch eine geeignete Parametrisierung) in Quader überführt, auf denen Integrale iterativ berechnet werden können. Im folgenden schauen wir uns die für die Praxis wichtigsten Koordinatentransformationen an: Ebene und räumliche *Polarkoordinaten* (auch bekannt als “Kugelkoordinaten”) sowie *Zylinderkoordinaten.*

Polarkoordinaten in der Ebene. Die Punkte der Ebene lassen sich anhand ihres Abstands r zum Ursprung und des (im Gegenuhrzeigersinn gemessenen) Winkels ϕ zur x-Achse (den sog. "Polarkoordinaten") beschreiben:[30]

$$P\colon [0,\infty[\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, \qquad P(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi)\,. \tag{62}$$

Die Jacobi-Matrix von P in (r,ϕ) ist gegeben durch

$$J_{(r,\phi)}(P) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante ist gleich r; für $r > 0$ ist die Matrix $J_{(r,\phi)}(P)$ also invertierbar. Man beachte, dass P nicht injektiv ist; z.B. ist $P(r,0) = P(r,2\pi)$. Jedoch erhält man einen Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, wenn man den Definitionsbereich zu $]0,\infty[\times]0,2\pi[$ verkleinert und im Bild die nicht-negative x-Achse weglässt: Die Einschränkung von P zu einer Abbildung

$$]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2\setminus([0,\infty[\times\{0\})$$

ist ein Diffeomorphismus. Nach der Transformationsformel (Satz 7.2) ist eine Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\setminus([0,\infty[\times\{0\})\to\mathbb{R}$ somit genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(r,\phi)\mapsto f\big(P(r,\phi)\big)\cdot|\det P'(r,\phi)| = f(r\cos\phi, r\sin\phi)\cdot r$$

auf $]0,\infty[\times]0,2\pi[$ integrierbar ist. Da Nullmengen beim Integrieren weggelassen werden dürfen, erhalten wir somit für jede messbare Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda_2 &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus([0,\infty[\times\{0\})} f\,d\lambda_2 = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,r\,d\lambda_2(r,\phi)\\
&= \int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,r\,d\lambda_2(r,\phi)\\
&= \int_{[0,\infty[}\int_{[0,2\pi]} f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,r\,d\phi\,dr\,,
\end{aligned} \tag{63}$$

wann immer einer (und somit jeder) der Integranden integrierbar ist. Hierbei haben wir zunächst die Nullmenge $[0,\infty[\times\{0\}$ beim Integrieren weggelassen, dann die Transformationsformel benutzt, dann die Nullmengen $\{0\}\times[0,2\pi]$ und $[0,\infty[\times\{\pi,-\pi\}$ hinzugenommen und schließlich den Satz von Fubini benutzt.

Wichtig ist, vor Anwendung der Transformationsformel zu prüfen, ob die "Ausnahmemengen" auf beiden Seiten Nullmengen sind.

[30]Skizzen zur Erläuterung der Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten werden in der Vorlesung an der Tafel angefertigt. Falls nötig, finden Sie solche Skizzen auch in Prof. Farwigs Vorlesungsskript "Integration im $\mathbb{R}^n$" auf den Seiten 29, 32 und 33; das Skript ist unter der URL

http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Lehrveranstaltungen/Lehrmaterial/SS2004/AnaII

als ps.gz-File und als pdf-File frei zugänglich (Vorsicht: Farwigs Kugelkoordinaten sind anders).

Beispiel 8.6 Als Anwendung von (63) berechnen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) \;:=\; e^{-x^2-y^2}\,.$$

Diese ist rotationssymmetrisch; mit Polarkoordinaten, (63) und der Substitution $s = r^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d\lambda_2(x,y) \;&=\; \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\phi\,dr \;=\; 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr \;=\; \pi \int_0^\infty e^{-s}\,ds \\ &=\; \pi \lim_{t\to\infty} \Big[-e^{-s}\Big]_0^t \;=\; \pi \lim_{t\to\infty} (1-e^{-t}) \;=\; \pi\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also f integrierbar. Andererseits erhalten wir mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2+y^2}\,d\lambda_2(x,y) \;&=\; \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy \;=\; \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\Big)\,e^{-y^2}\,dy \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy \;=\; \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\Big)^2\,,\end{aligned}$$

so dass schließlich

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \;=\; \sqrt{\pi} \tag{64}$$

folgt. Dieses Integral spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine zentrale Rolle. Es ermöglicht uns auch die Berechnung des Werts $\Gamma(1/2)$ der Γ-Funktion, der im Anschluss an Formel (46) benutzt wurde. Mit der Substitution $t = \sqrt{s}$ erhalten wir nämlich

$$\Gamma(1/2) \;=\; \int_0^\infty t^{-1/2}\,e^{-t}\,dt \;=\; 2\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\,ds \;=\; \sqrt{\pi}\,.$$

Zylinderkoordinaten. Die Punkte des Raums lassen sich mittels ihrer z-Koordinate, ihres Abstands r von der z-Achse und des (im Gegenuhrzeigersinn gemessenen) Winkels ϕ ihrer Projektion auf die x-y-Ebene zur x-Achse beschreiben (also mittels der sog. "Zylinderkoordinaten" (r,ϕ,z)):

$$Z\colon [0,\infty[\,\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \quad Z(r,\phi,z) \;:=\; \big(r\cos\phi,\; r\sin\phi,\; z\big)\,.$$

Hier ist

$$J_{(r,\phi,z)}(Z) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det J_{(r,\phi,z)}(Z) \;=\; r \;\neq\; 0$$

für $r > 0$. Die Einschränkung von Z auf

$$]0,\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\mathbb{R}$$

ist ein Diffeomorphismus auf die offene Menge [31]

$$\mathbb{R}^3 \setminus \big([0,\infty[\,\times\{0\}\times\mathbb{R}\big)\,.$$

Hierbei wurden im Definitionsbereich und im Bild wieder lediglich Nullmengen weggelassen.

Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten). Die Punkte des Raums lassen sich mittels ihres Abstands r zum Ursprung, des Winkels θ zur z-Achse (Breitengrad) und des im Gegenuhrzeigersinn gemessenen Winkels ϕ ihrer Projektion auf die x-y-Ebene zur x-Achse (Längengrad) beschreiben (also durch die sog. "Kugelkoordinaten" (r,θ,ϕ)) :

$$K\colon [0,\infty[\,\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \;\to\; \mathbb{R}^3\,, \quad K(r,\theta,\phi) \;:=\; \big(r\sin\theta\cos\phi,\, r\sin\theta\sin\phi,\, r\cos\theta\big)\,.$$

Man erhält

$$J_{(r,\theta,\phi)}(K) \;=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

mit Determinante

$$\det J_{(r,\theta,\phi)}(K) \;=\; r^2\sin\theta \;>\; 0$$

für $r>0$ und $\theta\in\,]0,\pi[$. Die Einschränkung von K auf

$$]0,\infty[\,\times\,]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[$$

ist ein Diffeomorphismus auf die offene Menge $\mathbb{R}^3\setminus\big([0,\infty[\,\times\{0\}\times\mathbb{R}\big)$, wobei in Definitionsbereich und Bild nur Nullmengen weggelassen wurden. [31]

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass man jenseits der Polarkoordinaten in Ebene und Raum auch Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ einführen kann. Details hierzu finden Sie z.B. in Prof. Rochs Skript zur Analysis III oder auch in Prof. Farwigs Skript zur Analysis II. Man könnte die mehrdimensionalen Polarkoordinaten zum Beweis des folgenden Satzes benutzen. Da die Berechnung der Jacobi-Determinanten der Transformation und die Bestimmung der Ausnahmemengen recht mühsam wäre, geben wir jedoch lieber einen direkten Beweis mit der Allgemeinen Transformationsformel.

Satz 8.7 (Integration rotationssymmetrischer Funktionen). *Gegeben eine messbare Funktion $f\colon[0,\infty[\,\to\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ ist auch*

$$F\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\,,\quad F(x) \;:=\; f(\|x\|_2)$$

messbar. Die Funktion F ist genau dann bzgl. λ_n über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn die Funktion $[0,\infty[\,\to\mathbb{R}$, $r\mapsto r^{n-1}f(r)$ bzgl. λ_1 über $[0,\infty[$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F\,d\lambda_n \;=\; n\,c_n\int_{[0,\infty[} f(r)r^{n-1}\,dr\,,$$

wobei c_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

[31] Diese Abbildung ist nämlich eine Bijektion, und da ihr Differential an jeder Stelle nach dem Vorigen invertierbar ist, ist die Abbildung nach dem Satz über die Umkehrfunktion ein Diffeomorphismus.

Beweis. Wir definieren $\phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$, $\phi(x) := \|x\|_2$. Da $F = f \circ \phi$, ist F nach der Allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.6) genau dann bzgl. λ_n über $\mathbb{R}^n$ integrierbar, wenn f bzgl. des Bildmaßes $\phi_*(\lambda_n)$ auf $([0,\infty[, \mathcal{B}([0,\infty[))$ über $[0,\infty[$ integrierbar ist, und in diesem Falle gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \, d\lambda_n \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \phi \, d\lambda_n \;=\; \int_{[0,\infty[} f \, d\phi_*(\lambda_n)\,.$$

Zum Beweis des Satzes brauchen wir also nur zu zeigen, dass $\phi_*(\lambda_n)$ mit dem Maß

$$n\, c_n\, r^{n-1}\, d\lambda_1|_{[0,\infty[}(r)$$

mit Dichte $n\, c_n\, r^{n-1}$ bzgl. $\lambda_1|_{[0,\infty[}$ übereinstimmt. Als Konsequenz von Folgerung 5.18 ist letzteres der Fall, wenn wir zeigen können, dass die zwei Maße für alle $0 \le a < b$ der Menge $]a,b]$ den gleichen Wert zuordnen und dieser endlich ist. Bezeichnet B_n die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, so ist $\phi^{-1}(]a,b])$ die Kugelschale $bB_n \setminus aB_n$ und somit

$$\phi_*(\lambda_n)(]a,b]) \;=\; \lambda_n(\phi^{-1}(]a,b])) \;=\; \lambda_n(bB_n \setminus aB_n) \;=\; \lambda_n(bB_n) - \lambda_n(aB_n) \;=\; (b^n - a^n)\, c_n\,.$$

Diese Zahl ist endlich und stimmt wie gewünscht mit

$$\int_{]a,b]} n\, c_n\, r^{n-1}\, d\lambda_1(r) \;=\; c_n \left[r^n\right]_a^b \;=\; (b^n - a^n)\, c_n$$

überein. □

Bem. Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare und rotationssymmetrische Funktion, so ist auch $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(r) := F(re_1)$ messbar (wobei $e_1 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$) und es gilt $F(x) = f(\|x\|_2)$, d.h. F geht aus f wie oben beschrieben hervor.

Teil IV : Integration über Untermannigfaltigkeiten

In der Analysis II haben wir bereits Kurven in $\mathbb{R}^n$ eine Länge zugeordnet (also ein "eindimensionales Volumen") und Funktionen über Kurven integriert. In ähnlichem Sinne würden wir gern auch Flächen in $\mathbb{R}^3$ (z.B. der Oberfläche der Einheitskugel) einen Flächeninhalt zuordnen können und Funktionen über solche Flächen integrieren.

Im vorigen Kapitel haben wir zur Berechnung von Integralen über Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ stets das Lebesgue-Borel-Maß λ_n benutzt. Für die jetzigen Zwecke taugt das Lebesgue-Borel-Maß allerdings nicht, denn Flächenstücke in $\mathbb{R}^3$ sind λ_3-Nullmengen, so dass alle Integrale bzgl. λ_3 über solche Mengen verschwinden. Man muss also anders vorgehen: Wir werden jeder Fläche M ein Maß S_M zuordnen, welches ihren Flächeninhalt (und den Flächeninhalt ihrer Teilmengen) misst.

Zunächst präzisieren wir in Kapitel 9, was genau wir unter Flächen in $\mathbb{R}^n$ (bzw. ihren höher-dimensionalen Verallgemeinerungen, den sog. "Untermannigfaltigkeiten" von $\mathbb{R}^n$) verstehen wollen. Anschließend ordnen wir jeder k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Maß S_M auf $(M, \mathcal{B}(M))$ zu, das sogenannte "Oberflächenmaß" (Kapitel 10). Man interpretiert dann $S_M(A)$ als das "k-dimensionale Volumen" der Borelmenge $A \subseteq M$. Insbesondere ist $S_M(M)$ das k-dimensionale Volumen von M.

9 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Grob gesagt sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ "schöne" und "glatte" Teilmengen kleinerer Dimension wie z.B. der Kreis $\mathbb{S}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$, die Einheitssphäre $\mathbb{S}_2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^3$ oder der Zylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

in $\mathbb{R}^3$. Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ lässt sich einerseits als Nullstellenmenge

$$\mathbb{S}_1 \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

beschreiben, andererseits jedoch auch durch einen reellen Parameter parametrisieren, z.B. via $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Analoges wird uns bei allgemeinen Untermannigfaltigkeiten wieder begegnen: Zunächt definieren wir Untermannigfaltigkeiten (lokal) als Nullstellenmengen geeigneter Funktionen. Anschließend zeigen wir, dass solche Untermannigfaltigkeiten sich immer lokal durch Parameter beschreiben lassen und hierdurch auch charakterisiert sind.

Bemerkung 9.1 Beide Sichtweisen kennen wir aus der Linearen Algebra, wo man Untervektorräume einerseits als Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme erhält, andererseits nach Wahl einer Basis durch eine Parameterdarstellung beschreiben kann.

Genauer: Gegeben $k \leq n$ und eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(a) E ist ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$;

(b) $E = \ker \alpha$ für eine geeignete surjektive lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ (α hat also den Rang $n-k$);

(c) $E = \operatorname{im} \alpha$ für eine geeignete injektive lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ (α hat also den Rang k);

(d) $\alpha(E) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ für eine geeignete bijektive lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Es ist nützlich, diese Charakterisierungen k-dimensionaler Untervektorräume im Hinterkopf zu behalten; im Folgenden begegnen wir nicht-linearen Varianten dieser Bedingungen.

In diesem Kapitel seien stets $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

Definition 9.2 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt derart, dass [32]

(a) $M \cap U = \{x \in U\colon f(x) = 0\}$ und

(b) Die Ableitung $f'(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ von f an der Stelle a ist eine surjektive lineare Abbildung, hat also den Rang $n-k$.

2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten nennt man auch *Flächen*.

Beispiel 9.3 Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist trivialerweise eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, denn es ist $U = f^{-1}(\{0\})$ mit der Nullfunktion $f\colon U \to \mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Interessant und spannend ist der Fall $k < n$.

Bemerkung 9.4 Schreiben wir die Funktion f aus Definition 9.2 als $f = (f_1, \ldots, f_{n-k})$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_j: U \to \mathbb{R}$, so lassen sich die dort beschriebenen Bedingungen wie folgt umformulieren:

(a) $M \cap U = \{x \in U\colon f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{n-k}(x) = 0\}$;

(b) Die Gradienten
$$\operatorname{grad} f_1(a)\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$$
der Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-k}$ an der Stelle a sind linear unabhängig.

[32] Verlangt man, dass f eine C^r-Funktion ist (also sogar r mal stetig differenzierbar), so nennt man M eine *C^r-Untermannigfaltigkeit* von $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten im Folgenden nur C^1-Untermannigfaltigkeiten.

Beispiel 9.5 Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$, denn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$ ist eine stetig differenzierbare Funktion derart, dass

$$\mathbb{S}_1 \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x,y) = 0\}$$

und

$$\operatorname{grad} f(x,y) \;=\; \big(2x,\, 2y\big) \;\neq\; 0$$

für alle $a = (x,y) \in \mathbb{S}_1$ (in diesem Falle können wir also sogar für alle $a \in \mathbb{S}_1$ die gleiche Funktion f nehmen).

Beispiel 9.6 Die Einheitssphäre $\mathbb{S}_2$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, denn $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ist eine stetig differenzierbare Funktion derart, dass

$$\mathbb{S}_2 \;=\; \{x \in \mathbb{R}^3\colon f(x,y,z) = 0\}$$

und

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) \;=\; \big(2x,\, 2y,\, 2z\big) \;\neq\; 0$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{S}_2$.

Analog sieht man, dass die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre

$$\mathbb{S}_{n-1} \;:=\; \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist (Übung).

Beispiel 9.7 Der Zylinder $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, denn $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - 1$ ist eine stetig differenzierbare Funktion derart, dass

$$Z \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon f(x,y,z) = 0\}$$

und

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) \;=\; \big(2x,\, 2y,\, 0\big) \;\neq\; 0 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in Z.$$

Beispiel 9.8 Der Einheitskreis $\mathbb{S}_1 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ in der xy-Ebene ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, denn es ist

$$\mathbb{S}_1 \times \{0\} \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\},$$

wobei $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y,z) := x^2 + y^2 - 1$ und $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_2(x,y,z) := z$ stetig differenzierbare Funktionen sind, deren Gradienten

$$\operatorname{grad} f_1(x,y,z) \;=\; \big(2x,\, 2y,\, 0\big)$$

und

$$\operatorname{grad} f_2(x,y,z) \;=\; \big(0,\, 0,\, 1\big)$$

linear unabhängig sind für alle $(x,y,z) \in \mathbb{S}_1 \times \{0\}$.

Bei der Definition von Untermannigfaltigkeiten haben wir uns von Bemerkung 9.1 (b) leiten lassen. Wir haben die lokale Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen zu ihrer Definition gewählt, da diese Bedingung für konkrete Beispiele leicht nachzuprüfen ist. Dass Untermannigfaltigkeiten tatsächlich "schöne" und "glatte" Mengen sind, sieht man dieser Definition leider nicht direkt an, sondern muss es beweisen. Man könnte mit dem Satz über implizite Funktionen zeigen, dass eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal immer aussieht wir der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^k \supseteq U \to \mathbb{R}^{n-k}$ (dies machen wir uns in der Übung in Spezialfällen klar). Für unsere Zwecke ist die folgende (Bemerkung 9.1 (d) entsprechende) Beschreibung nützlicher: Eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ sieht lokal aus wie $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 9.9 *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und einen Diffeomorphismus $\psi\colon U \to V$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt derart, dass*

$$\psi(U \cap M) \;=\; V \,\cap\, (\mathbb{R}^k \times \{0\})\,. \tag{65}$$

Beweis. Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so finden wir zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und eine stetig differenzierbare Funktion $f = (f_1, \ldots, f_{n-k})\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ derart, dass $U \cap M = \{x \in U\colon f(x) = 0\}$ und

$$\operatorname{grad} f_1(a)\,,\; \ldots\,,\; \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$$

linear unabhängig sind. Nach dem Basisergänzungssatz aus der Linearen Algebra finden wir $i_1 < \cdots < i_k$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$ derart, dass

$$e_{i_1}\,,\; e_{i_2}\,,\; \ldots\,,\; e_{i_k}\,,\; \operatorname{grad} f_1(a)\,,\; \ldots\,,\; \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$ sind. Dann ist

$$\psi\colon U \to \mathbb{R}^n\,, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \;\mapsto\; \big(x_{i_1},\, x_{i_2},\, \ldots,\, x_{i_k},\, f(x)\big)$$

eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung $\psi'(a)$ an der Stelle a eine invertierbare lineare Abbildung ist, denn die Jacobi-Matrix $J_a(\psi)$ hat die linear unabhängigen Zeilen

$$e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, \operatorname{grad} f_1(a), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(a)\,.$$

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion können wir nach Verkleinern von U also annehmen, dass $V := \psi(U)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist und $\psi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Für $x \in U$ sind nun äquivalent:

$$x \in M \cap U \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) \in V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Folglich gilt (65).

Gibt es umgekehrt für jeden Punkt $a \in M$ einen Diffeomorphismus $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$:

$U \to V$ von einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass (65) gilt, so ist $f = (f_1, \ldots, f_{n-k}) := (\psi_{k+1}, \ldots, \psi_n) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine stetig differenzierbare Funktion derart, dass $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ gilt und die Vektoren

$$\operatorname{grad} f_1(a) = \operatorname{grad} \psi_{k+1}(a)\,, \quad \operatorname{grad} f_2(a) = \operatorname{grad} \psi_{k+2}(a)\,, \quad \ldots\,, \quad \operatorname{grad} f_{n-k}(a) = \operatorname{grad} \psi_n(a)$$

linear unabhängig sind, da sie genau die $(k+1)$-te bis n-te Zeile der invertierbaren Matrix $J_a(\psi)$ sind. □

Immersionen; Einbettungen; Parametrisieren von Untermannigfaltigkeiten

Wir wollen nun k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^n$ lokal durch Parameter in $\mathbb{R}^k$ beschreiben, also für jeden Punkt $a \in M$ die Punkte von M nahe a in der Form $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ schreiben mit einer Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^k \supseteq U \to M$. Dabei wollen wie natürlich nicht völlig beliebige Abbildungen ϕ als Parametrisierungen zulassen. Die Abbildungen ϕ, welche für uns von Interesse sind, werden insbesondere sogenannte "Immersionen" sein, die wir nun definieren und ein wenig näher anschauen. Wie zuvor sind $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

Definition 9.10 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ heißt *Immersion*, wenn die lineare Abbildung $\phi'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ für jedes $x \in U$ injektiv ist, also $\operatorname{rang} \phi'(x) = k$ für alle $x \in U$.

Im Fall $k = 1$ ist ϕ eine Kurve, und ϕ ist genau dann eine Immersion, wenn $\phi'(x) \neq 0$ für alle x.

Beispiel 9.11 Die "Neilsche Parabel" $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2, x^3)$ ist wegen $\phi'(0) = (0, 0)$ *keine* Immersion.

Beispiel 9.12 (Parametrisierung eines Graphen). Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist

$$\phi\colon U \to \mathbb{R}^{k+1}\,, \quad \phi(x) := \big(x,\, f(x)\big)$$

eine Immersion. Die der Ableitung $\phi'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k+1})$ entsprechende Jacobimatrix $J_x(\phi)$ ist nämlich von der Form

$$J_x(\phi) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k \\ J_x(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix}$$

(mit der $(k \times k)$-Einheitsmatrix $\mathbf{1}_k$) und hat daher offenbar für jedes $x \in U$ den Rang k.

Beispiel 9.13 (Rotationsflächen). Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) \ := \ \begin{pmatrix} r(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Wir nehmen an, dass $r(t) > 0$ für alle $t \in I$, so dass das Bild $\Gamma := \operatorname{im}\gamma$ von γ in der rechten Halbebene liegt. Somit liegt $\{0\} \times \Gamma$ in der rechten Halbebene der yz-Ebene in $\mathbb{R}^3$. Wir interessieren uns für die Menge, die durch Rotation von $\{0\} \times \Gamma$ um die z-Achse entsteht. Dazu betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(t,\phi) \ := \ \begin{pmatrix} r(t)\cos\phi \\ r(t)\sin\phi \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Bild

$$M \ := \ \Phi(I \times \mathbb{R}) \ = \ \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{ es existiert } t \in I \text{ mit } x^2 + y^2 = r(t)^2 \text{ und } z = \zeta(t)\Big\}.$$

Das Bild von Φ entsteht also durch Rotation von $\{0\} \times \Gamma$ um die z-Achse. Die Jacobi-Matrix von Φ in (t,ϕ) ist

$$J_{(t,\phi)}(\Phi) \ = \ \begin{pmatrix} r'(t)\cos\phi & -r(t)\sin\phi \\ r'(t)\sin\phi & r(t)\cos\phi \\ \zeta'(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Da wir $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ angenommen haben, hat diese Matrix genau dann den Rang 2, wenn $r'(t) \neq 0$ oder $\zeta'(t) \neq 0$ ist, d.h. wenn $\gamma'(t) \neq 0$. Ist also γ eine Immersion, so ist auch Φ eine Immersion.

Wann ist die durch Rotation entstandene Menge M eine Fläche (die wir dann mit Fug und Recht eine "Rotationsfläche" nennen dürfen)?

Satz 9.14 *Ist in der Situation von Beispiel* 9.13 *das Bild* $\Gamma := \operatorname{im}\gamma$ *eine* 1*-dimensionale Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^2$*, so ist die "Rotationsfläche"* $M := \operatorname{im}\Phi$ *eine* 2*-dimensionale Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^3$*.*

Beweis. Ist $a = (a_1, a_2, a_3) \in M$, so lässt sich a durch eine Drehung um die z-Achse in den Punkt $(0, r, a_3)$ mit $r := \sqrt{a_1^2 + a_2^2} > 0$ überführen. Da Γ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist, existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \,]0,\infty[\, \times \mathbb{R}$ von (r, a_3) und eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma \cap V = \{(y,z) \in V : f(y,z) = 0\}$ und $\operatorname{grad} f(r, a_3) \neq 0$. Da

$$h\colon \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \qquad h(x,y,z) \ := \ \Big(\sqrt{x^2+y^2},\, z\Big)$$

stetig differenzierbar (und somit stetig) ist, ist die durch Rotation von $\{0\} \times V$ um die z-Achse entstehende Menge $U := h^{-1}(V)$ offen in $\mathbb{R}^3$ und

$$g \;:=\; f \circ h|_U : U \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x,y,z) \;=\; f\big(\sqrt{x^2+y^2},\; z\big)$$

stetig differenzierbar. Die Kettenregel liefert

$$\operatorname{grad} g(a) \;=\; \Big(\frac{a_1}{r} D_1 f(r,a_3),\; \frac{a_2}{r} D_1 f(r,a_3),\; D_2 f(r,a_3)\Big) \;\neq\; 0$$

und man macht sich klar, dass $M \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\}$. Somit ist wie gewünscht M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. □

Beispiel 9.15 Schließlich sehen wir uns noch eine Parametrisierung der zweidimensionalen Sphäre (durch Polarkoordinaten) an. Wir betrachten die Abbildung

$$P \;: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad P(\theta,\phi) \;:=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J_{(\theta,\phi)}(P) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat genau dann den Rang 2, wenn $\sin\theta \neq 0$. Die Einschränkung von P auf die offene Menge $]0,\pi[\, \times \mathbb{R}$ ist also eine Immersion, und

$$P\Big(\big]0,\pi\big[\; \times \mathbb{R}\Big) \;=\; \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\;\; |z| \neq 1\Big\}$$

ist die Einheitssphäre ohne Nord- und Südpol.

Wie das vorige Beispiel zeigt, braucht eine Immersion nicht injektiv zu sein. Die Abbildungen, die wir schließlich zum Parametrisieren benutzen wollen, sollen hingegen injektiv sein. Wir werden sogar verlangen, dass sie sogenannte "Einbettungen" sind.

Definition 9.16 Eine Abbildung $\phi\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt *Einbettung*,[33] wenn sie stetig ist, injektiv und die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : \phi(X) \to X$ (bzgl. der von Y auf $\phi(X)$ induzierten Metrik) stetig ist.

[33] Man sagt auch, ϕ sei eine "topologische Einbettung" oder ein "Homöomorphismus aufs Bild."

Beispiel 9.17 Die Abbildung $\gamma\colon [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ ist eine injektive Immersion, deren Bild die Einheitskreislinie $\mathbb{S}_1$ ist. Die Umkehrabbildung $\eta : \mathbb{S}_1 \to [0,2\pi[$, $\gamma(t) \mapsto t$ ist jedoch nicht stetig, denn es gilt $\gamma(2\pi - \frac{1}{n}) \to \gamma(0)$, aber $2\pi - \frac{1}{n} = \eta(\gamma(2\pi - \frac{1}{n}))$ konvergiert nicht gegen $0 = \eta(\gamma(0))$. Die Abbildung γ ist also keine Einbettung.

Beispiel 9.18 Ist K ein kompakter metrischer Raum und $\phi\colon K \to Y$ eine injektive stetige Abbildung in einen metrischen Raum Y, so ist ϕ automatisch eine Einbettung.[34]

[Beweis: Wir müssen zeigen, dass $f := \phi^{-1} : \phi(K) \to K$ stetig ist. Dies gilt genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq K$ abgeschlossen im metrischen Raum $\phi(K)$ ist. Als abgeschlossene Teilmenge von K ist A kompakt. Also ist auch das stetige Bild $f^{-1}(A) = \phi(A)$ kompakt und somit wie gewünscht abgeschlossen in $\phi(K)$.]

Bemerkung 9.19 Sind X, Y metrische Räume, $f\colon X \to Y$ eine Einbettung und $U \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist übrigens auch die Einschränkung $f|_U : U \to Y$ eine Einbettung, wenn wir $U \subseteq X$ mit der induzierten Metrik versehen. Dies folgt daraus, dass mit f^{-1} auch $(f|_U)^{-1} = f^{-1}|_{f(U)}$ (als Einschränkung einer stetigen Funktion) stetig ist.

Kombinieren wir Beispiel 9.18 und Bemerkung 9.19, so erhalten wir das folgende Kriterium, das es in vielen Situationen sehr einfach macht, eine Abbildung (ganz ohne Rechnung!) als Einbettung zu erkennen:

Lemma 9.20 (Erkennen von Einbettungen). *Es sei $\phi\colon K \to \mathbb{R}^m$ eine injektive stetige Abbildung auf einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq K$ eine Teilmenge. Dann ist $\phi|_U$ eine Einbettung.* □

Satz 9.21 (Parametrisierungssatz). *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(U) = V \cap M$ gibt, die eine Einbettung ist.*

Beweis. Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$, so gibt es nach Lemma 9.9 offene Mengen $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in V$ und einen Diffeomorphismus $\psi\colon V \to W$ derart, dass

$$\psi(V \cap M) \; = \; W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})\,. \tag{67}$$

Da die lineare Abbildung $j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $j(x) := (x,0)$ stetig ist, ist dann die Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^k : (x,0) \in W\} = j^{-1}(W)$ offen in $\mathbb{R}^k$ und $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$, $\phi(x) := \psi^{-1}(j(x)) = \psi^{-1}(x,0)$ stetig differenzierbar. Wegen (67) gilt $\phi(U) = V \cap M$. Aus

$$\psi(\phi(x)) \; = \; \psi(\psi^{-1}(x,0)) \; = \; (x,0)$$

[34]Sie dürfen gerne annehmen, dass K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist und $Y = \mathbb{R}^m$; nur dieser Spezialfall wird in der Vorlesung benötigt.

schließen wir, dass ϕ injektiv ist und die Umkehrfunktion $\phi^{-1}\colon \phi(U) = V \cap M \to U$ gegeben ist durch $\phi^{-1}(x) = \mathrm{pr}_1(\psi(x))$ und somit stetig (wobei $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf $\mathbb{R}^k$ ist). Also ist ϕ eine Einbettung. Wegen $\phi = \psi^{-1} \circ j$ liefert die Kettenregel

$$\phi'(x) \;=\; (\psi^{-1})'\big(j(x)\big) \circ j \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Für jedes $x \in U$ ist also $\phi'(x)$ eine Komposition injektiver Abbildungen und somit injektiv, d.h. ϕ ist eine Immersion.

Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, prüfen wir die in Lemma 9.9 beschriebene Bedingung ("M sieht lokal aus wie $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$"). Hierzu sei $a \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(U) = V \cap M$, die eine Einbettung ist. Sei $b := \phi^{-1}(a)$. Da $\phi'(b)$ den Rang k besitzt, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(b), \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}(b)$ linear unabhängig. Mit dem Basisergänzungssatz finden wir $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k}$ in $\{1, 2, \ldots, n\}$ derart, dass

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(b)\,,\;\ldots\,,\;\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(b)\,,\; e_{i_1}\,,\; e_{i_2}\,,\;\ldots\,,\; e_{i_{n-k}} \tag{68}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist (wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$ sind). Dann ist

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \supseteq U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n\,, \quad \Phi(x, t_1, \ldots, t_{n-k}) \;:=\; \phi(x) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j e_{i_j}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, deren Jacobi-Matrix in b die $n \times n$-Matrix mit den linear unabhängigen Spalten (68) ist und somit eine invertierbare Matrix. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion finden wir nun eine offene Umgebung $P \subseteq U \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(b, 0)$ derart, dass $\Phi(P)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $\Phi|_P : P \to \Phi(P)$ ein Diffeomorphismus ist.[35] Nach Verkleinern von P dürfen wir annehmen, dass $P = P_1 \times P_2$ mit einer offenen Umgebung P_1 von b in $\mathbb{R}^k$ und einer offenen 0-Umgebung $P_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$. Da ϕ eine Einbettung ist, ist $\phi(P_1)$ offen in $M \cap V$. Es gibt also eine offene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\phi(P_1) \;=\; M \cap A\,. \tag{69}$$

Es existiert eine offene Umgebung $Q_1 \subseteq P_1$ von b und eine offene 0-Umgebung $Q_2 \subseteq P_2$ derart, dass $W := \Phi(Q_1 \times Q_2) \subseteq A$. Dann ist

$$\psi\colon W \to Q_1 \times Q_2 \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) \;:=\; (\Phi|_P)^{-1}(x)$$

ein Diffeomorphismus derart, dass

$$\psi(W \cap M) \;=\; Q_1 \times \{0\} \tag{70}$$

[35] Wir haben gerade gezeigt, dass sich ϕ (eine "Karte" in späterer Sprechweise) stets lokal zu einem Diffeomorphismus $\Phi|_P\colon P \to \Phi(P)$ zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ "fortsetzen" lässt in dem Sinne, dass $\Phi(x, 0) = \phi(x)$. Dies ist ein nützliches Hilfsresultat, das man im Hinterkopf behalten sollte.

$(= (Q_1 \times Q_2) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, womit die Bedingung aus Lemma 9.9 erfüllt ist). In der Tat: Die Inklusion "$\supseteq$" in (70) gilt wegen $\psi^{-1}(x,0) = \Phi(x,0) = \phi(x) \in M$ für $x \in Q_1$. Ist umgekehrt $y \in W \cap M$, so ist $\Phi(\psi(y)) = y$ aber wegen $y \in W \cap M \subseteq A \cap M = \phi(P_1)$ (siehe (69)) auch $y = \phi(p) = \Phi(p,0)$ für ein $p \in P_1$. Da Φ auf P injektiv ist, folgt $\psi(y) = (p,0)$. Also $\psi(W \cap M) \subseteq Q_1 \times \{0\}$. □

Die im vorigen Satz betrachteten Abbildungen ϕ spielen eine wichtige Rolle und verdienen einen eigenen Namen:

Definition 9.22 Eine *Karte* einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ ist eine auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ definierte Immersion $\phi\colon U \to M$, die zudem eine Einbettung ist und deren Bild $\phi(U)$ in M (versehen mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik) offen ist, also $\phi(U) = M \cap V$ für eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Mithilfe einer Karte $\phi\colon U \to M$ parametrisieren wir nun also die Teilmenge $\phi(U) \subseteq M$.

Beispiel 9.23 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und eine Einbettung, so ist $M := \phi(U)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\phi\colon U \to M$ eine Karte für M (da $\phi(U) = V \cap M$ mit $V := \mathbb{R}^n$ offen in $\mathbb{R}^n$, ist nämlich auch die dritte in Satz 9.21 formulierte Bedingung erfüllt).

Beispiel 9.24 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist der Graph

$$\Gamma := \big\{(x, f(x))\colon x \in U\big\}$$

von f eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k+1}$. Um dies einzusehen, erinnern wir daran, dass

$$\phi\colon U \to \mathbb{R}^{k+1}, \quad \phi(x) := \big(x,\, f(x)\big)$$

nach Beispiel 9.12 eine Immersion ist. Bezeichnet $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf den ersten Faktor, so ist $\mathrm{pr}_1(\phi(x)) = x$ und somit ϕ injektiv, mit stetiger Umkehrfunktion $\phi^{-1} = \mathrm{pr}_1|_\Gamma$. Also ist ϕ eine Einbettung. Nach Beispiel 9.23 ist somit $\Gamma = \phi(U)$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k+1}$ mit einer (globalen) Karte $\phi\colon U \to \Gamma$.

Bemerkung 9.25 In der Situation von Definition 9.22 nennt man $\phi^{-1}(p)_1, \ldots, \phi^{-1}(p)_k$ für $p \in \phi(U)$ die *Koordinaten* des Punkts p bzgl. der Karte ϕ und bezeichnet daher die Funktionen

$$(\phi^{-1})_j : \phi(U) \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, k$$

auch als *lokale Koordinaten.*[36] Für $p = \phi(x_1, \ldots, x_k)$ sind also $x_1, \ldots, x_k$ die Koordinaten von p bezüglich der Karte ϕ.

Offenbar kann ein Punkt für verschiedene Karten verschiedene Koordinaten besitzen. Man hat sich daher zu überlegen, was beim Wechsel von Koordinatensystemen passiert.

[36] Unsere Karten werden in der Literatur häufig "lokale Koordinaten" genannt, unsere lokalen Koordinaten "Karten." Man muss sich immer erst Klarheit über die Konventionen verschaffen.

Satz 9.26 (Kartenwechsel / Parameter-Transformation). *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $\phi_1 : U_1 \to M$ und $\phi_2 : U_2 \to M$ seien Karten von M. Dann ist $V := \phi_1(U_1) \cap \phi_2(U_2)$ offen in M, für $j \in \{1,2\}$ ist $W_j := \phi_j^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von U_j, und*

$$\psi := (\phi_2|_{W_2})^{-1} \circ \phi_1|_{W_1} : W_1 \to W_2$$

ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. Per Definition einer Karte sind $\phi_1(U_1)$ und $\phi_2(U_2)$ offen in M (versehen mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik) und somit ist auch $V = \phi_1(U_1) \cap \phi_2(U_2)$ offen in M. Als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist somit $W_j = \phi_j^{-1}(V)$ offen in U_j. Per Konstruktion ist ψ bijektiv. Da wir die Rollen von ϕ_1 und ϕ_2 vertauschen können, ist ψ ein Diffeomorphismus, wenn wir zeigen können, dass ψ stetig differenzierbar ist. Hierzu brauchen wir nur zu zeigen, dass jeder Punkt $x_1 \in W_1$ eine offene Umgebung $A \subseteq W_1$ besitzt derart, $\psi|_A : A \to W_2$ stetig differenzierbar ist. Wie im Beweis von Satz 9.21 gezeigt (siehe dir dortige Fußnote!) können wir ϕ_1 und ϕ_2 auf einer Umgebung von x_1 bzw. $x_2 := \psi(x_1)$ zu einem lokalen Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^n$ fortsetzen: Für $j \in \{1,2\}$ existieren eine offene Umgebung $P_j \subseteq W_j$ von x_j, eine offene Nullumgebung $N_j \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ und ein Diffeomorphismus

$$\Phi_j : P_j \times N_j \to \Omega_j$$

auf eine offene Teilmenge Ω_j von $\mathbb{R}^n$ derart, dass $\Phi_j(x,0) = \phi_j(x)$ für alle $x \in P_j$. Da die lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\lambda(x) := (x,0)$ stetig ist, ist die Menge $A := \{x \in P_1 : (x,0) \in \Omega_2\} = P_1 \cap \lambda^{-1}(\Omega_2)$ offen in P_1, somit offen in W_1. Für $x \in A$ folgt

$$\big(\psi(x), 0\big) = \big(\phi_2^{-1}(\phi_1(x)), 0\big) = \Phi_2^{-1}(\phi_1(x)) = \Phi_2^{-1}(\Phi_1(x,0)).$$

Somit gilt (unter Weglassen von Klammern)

$$\psi(x) = \mathrm{pr}_1\, \Phi_2^{-1}\, \Phi_1\, \lambda(x) \qquad \text{für alle } x \in A, \tag{71}$$

wobei $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ die (stetige, lineare) Projektion auf den ersten Faktor ist. Nach (71) ist $\psi|_A$ eine Komposition stetig differenzierbarer Abbildungen und somit stetig differenzierbar. □

Das gleiche Argument zeigt:

Lemma 9.27 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $f : W \to M$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer offenen Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^\ell$ (d.h. $f : W \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar und $f(W) \subseteq M$). Dann ist für jede Karte $\phi : \mathbb{R}^k \supseteq U \to M$ die Komposition*

$$h : \mathbb{R}^\ell \supseteq f^{-1}(\phi(U)) \to \mathbb{R}^k, \qquad h(x) := \phi^{-1}(f(x))$$

stetig differenzierbar. Ist f eine Immersion, so auch h.

Beweis. Für jeden Punkt $x_0 \in f^{-1}(\phi(U))$ können wir ϕ lokal um den Punkt $h(x_0) = \phi^{-1}(f(x_0))$ zu einem Diffeomorphismus Φ zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ fortsetzen (d.h. $\phi(x) = \Phi(x, 0)$), siehe Fußnote 35 im Beweis von Satz 9.21. Dann ist

$$\Phi^{-1}(f(x)) \;=\; (\phi^{-1}(f(x)), 0) \quad \text{für } x \text{ nahe } x_0 \tag{72}$$

und somit $h(x) = \phi^{-1}(f(x)) = \mathrm{pr}_1(\Phi^{-1}(f(x))$ nach der Kettenregel eine stetig differenzierbare Funktion von x, wobei $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf den ersten Faktor ist. Ist f eine Immersion, so ist $(\Phi^{-1} \circ f)'(x) = (\Phi^{-1})'(f(x)) \circ f'(x)$ eine injektive lineare Abbildung, deren Bild wegen (72) in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ enthalten ist. Folglich ist auch $h'(x) = \mathrm{pr}_1 \circ (\Phi^{-1})'(f(x)) \circ f'(x)$ injektiv und somit h eine Immersion. □

Wenn man bereits weiß, dass M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, braucht man übrigens nicht alle drei Bedingungen in der Definition einer Karte von Hand nachzuprüfen:

Lemma 9.28 *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\phi\colon U \to M$ eine injektive Immersion, so ist ϕ eine Karte für M.*

Beweis. Für den Beweis (den wir in der Vorlesung überspringen) braucht man nur zu zeigen, dass ϕ eine "offene" Abbildung ist, also $\phi(W)$ offen in M (mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik) ist für jede offene Teilmenge $W \subseteq U$. Dann ist nämlich (da man $W := U$ wählen kann) $\phi(U)$ offen in M (somit die dritte Bedingung in der Definition einer Karte erfüllt); zudem ist $f := \phi^{-1} : \phi(U) \to U$ stetig, da $f^{-1}(W) = \phi(W)$ offen in M ist für jede offene Teilmenge $W \subseteq U$ (und somit ist auch die zweite Bedingung erfüllt, ϕ ist eine Einbettung).

Können wir zeigen, dass jeder Punkt $a \in U$ eine offene Umgebung $U_a \subseteq U$ besitzt derart, dass $\phi|_{U_a}$ eine offene Abbildung ist, so ist auch ϕ eine offene Abbildung, denn für jede offene Teilmenge $Q \subseteq U$ ist wegen $Q = Q \cap U = Q \cap \bigcup_{a \in U} U_a = \bigcup_{a \in U}(Q \cap U_a)$ dann

$$\phi(Q) \;=\; \phi\Big(\bigcup_{a\in U}(Q \cap U_a)\Big) \;=\; \bigcup_{a\in U} \phi(Q \cap U_a) \;=\; \bigcup_{a\in U} \phi|_{U_a}(Q \cap U_a)$$

offen in M als Vereinigung offener Mengen.

Sei $a \in U$ und $\psi\colon \mathbb{R}^k \supseteq V \to M$ eine Karte von M mit $\phi(a) \in \psi(V)$. Nach Lemma 9.27 ist dann

$$h : \phi^{-1}(\psi(V)) \;\to\; V \subseteq \mathbb{R}^k\,, \quad h(x) \;:=\; \psi^{-1}(\phi(x))$$

stetig differenzierbar und eine Immersion zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^k$. Also injektive lineare Selbstabbildung von $\mathbb{R}^k$ ist $h'(a)$ invertierbar. Der Satz über die Umkehrfunktion liefert daher eine offene Umgebung $W \subseteq \phi^{-1}(\psi(V))$ von a derart, dass $h(W) \subseteq V$ offen ist und $h|_W : W \to h(W)$ ein Diffeomorphismus. Folglich ist $h|_W$ eine offene Abbildung und somit ist auch $\phi|_W = \psi \circ h|_W : W \to M$ eine offene Abbildung als Komposition offener Abbildungen. Nun setze $U_a := W$. □

Bemerkung 9.29 Übrigens kann man jenseits der Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeiten auch "intrinsisch" definieren (ohne einen umgebenden Vektorraum). Mehr darüber lernen können Sie in Vorlesungen über "Differentialgeometrie" oder "Lie-Gruppen."

10 Integration über Untermannigfaltigkeiten

10.1 Das Oberflächenmaß auf einer Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Karte

Wir wollen nun das Integral von Funktionen über k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^n$ definieren. Dabei nehmen wir zunächst an, dass M durch eine einzige Karte beschrieben werden kann. Sobald wir diesen Spezialfall gründlich verstanden haben, wenden wir uns dem (deutlich aufwendigeren) allgemeinen Fall zu.

10.1 Motivation, Teil I. Zur Motivation betrachten wir zunächst wieder eine lineare Version. Es sei $k < n$, $A \in M(n, k, \mathbb{R})$ eine $n \times k$-Matrix vom Rang k und $W := [0,1]^k$ der k-dimensionale Einheitswürfel. Dann ist das n-dimensionale Volumen von $AW \subseteq \mathbb{R}^n$ gleich Null nach Satz 8.4 (und wenig interessant). Wir wollen ein "k-dimensionales Volumen" von AW definieren. Dieses soll sich nicht ändern, wenn eine orthogonale Matrix (Drehmatrix) $T \in O_n(\mathbb{R})$ auf AW angewandt wird. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann T so gewählt werden, dass [37] $TA\,\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Projektion

$$\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k\,, \quad (x,y) \mapsto x$$

(die wir im folgenden durch die $k \times n$-Matrix P beschreiben) bildet $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ bijektiv (und isometrisch) auf $\mathbb{R}^k$ ab. Es ist plausibel, dass TAW und $PTAW$ daher das gleiche k-dimensionale Volumen besitzen sollen. Nun beschreibt aber PTA eine bijektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^k$ und somit ist

$$\lambda_k(PTAW) \;=\; |\det(PTA)|\,\lambda_k(W) \;=\; |\det(PTA)|$$

(siehe die Ausführungen im Anschluss an Satz 7.2, vor dessen Beweis). Diese Formel ist noch nicht sehr hilfreich, da sie die Drehmatrix T enthält (die wir irgendwie wählen mussten). Nun ist aber [38]

$$\begin{aligned} |\det(PTA)|^2 &= \det(A^tT^tP^t)\det(PTA) \;=\; \det(A^tT^tP^tPTA) \\ &= \det(A^tT^tTA) \;=\; \det(A^tA)\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Damit haben wir eine brauchbare Formel für das k-dimensionale Volumen von AW:

$$\mathrm{Vol}_k(AW) \;=\; \sqrt{\det(A^tA)}\,.$$

Beachten Sie, dass $\det(A^tA) \geq 0$ nach (73). [39]

[37] Dies geht wie folgt: Wir wählen eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_k$ von $A\mathbb{R}^k$, ergänzen diese zu einer Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ und definieren dann T als die durch $Tv_j := e_j$ festgelegte Matrix, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$ sind, d.h. $T := (v_1, \ldots, v_n)^{-1}$.

[38] Man beachte: P^tP beschreibt die Orthogonalprojektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Bild $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$; wegen $TA\,\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist somit $P^tPTA = TA$.

[39] Alternativ: Die Matrix A^tA ist positiv semidefinit und hat daher eine nichtnegative Determinante.

Motivation, Teil II. Nun sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Karte $\phi: \mathbb{R}^k \supseteq U \to M$. Wir betrachten einen Punkt $x_0 \in U$ und einen kleinen Würfel $W := x_0 + [0, \varepsilon]^k \subseteq U$. Da ϕ stetig differenzierbar ist, können wir ϕ um x_0 linearisieren: Es ist

$$\phi(x) \ = \ \phi(x_0) + J_{x_0}(\phi)(x - x_0) \ + \ o(\|x - x_0\|_2) \qquad \text{für } \ x \in U.$$

Das Flächenstück $\phi(W)$ sieht also etwa aus wie $\phi(x_0) + J_{x_0}(\phi)([0, \varepsilon]^n)$, wobei letztere Menge aufgrund unserer Vorüberlegungen zum linearen Fall das k-dimensionale Volumen $\sqrt{|\det(J_{x_0}(\phi)^t J_{x_0}(\phi))|}\ \lambda_k([0, \varepsilon]^k)$ haben sollte.

Es ist plausibel, dass man (wie beim 1-dimensionalen Riemann-Integral) eine Approximation für das k-dimensionale Volumen von M erhält, indem man U in kleine Würfel aufteilt und die eben berechneten Volumina der linearisierten Flächenstücke aufaddiert. Da für feinere und feinere Unterteilungen die Approximation durch die Linearisierung immer besser wird, erwartet man, das korrekte Volumen zu erhalten, wenn man die Summation durch ein Integral ersetzt:

$$\mathrm{Vol}_k(M) \ = \ \int_U \sqrt{|\det(J_x(\phi)^t J_x(\phi))|}\ d\lambda_k(x)\,.$$

Nach diesen Vorüberlegungen ist der Weg zur Definition des k-dimensionalen Volumens von Untermannigfaltigkeiten mit globaler Karte vorgezeichnet.

Definition 10.2 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $J_x(\phi)$ ihre Jacobi-Matrix im Punkt $x \in U$. Für jedes $x \in U$ ist

$$G_\phi(x) \ := \ J_x(\phi)^t J_x(\phi)$$

eine $k \times k$-Matrix; die so erhaltene Matrix-wertige Funktion $G_\phi : U \to M_k(\mathbb{R})$ heißt der *Maßtensor* von ϕ. Die Funktion

$$g_\phi\colon U \to \mathbb{R}\,, \quad g_\phi(x) \ := \ \det G_\phi(x)$$

wird die *Gramsche Determinante* von ϕ genannt.

Bemerkung 10.3 Da die Einträge der Matrix $J_x(\phi)$ stetig von x abhängen, sind G_ϕ und g_ϕ stetige Funktionen.

Bemerkung 10.4 Offensichtlich ist $G_\phi(x)$ eine symmetrische Matrix. Wir zeigen nun, dass $G_\phi(x)$ sogar positiv definit ist und somit $g_\phi(x) > 0$ für alle $x \in U$.

Beweis: Gegeben $0 \neq v \in \mathbb{R}^k$ ist

$$v^t G_\phi(x) v \ = \ v^t J_x(\phi)^t J_x(\phi) v \ = \ (J_x(\phi)v)^t J_x(\phi) v \ = \ (\phi'(x).v)^t \phi'(x).v \ = \ \|\phi'(x).v\|_2^2 \ > \ 0\,,$$

denn $\phi'(x)$ ist injektiv (da ϕ eine Immersion ist) und somit $\phi'(x).v \neq 0$.

Bemerkung 10.5 Für Rechnungen ist oft zeitsparend, den Maßtensor nicht als Matrixprodukt zu berechnen, sondern mithilfe von Skalarprodukten: Es ist

$$G_\phi(x) \;=\; J_x(\phi)^t J_x(\phi) \;=\; \Big(\Big\langle \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x),\; \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\Big\rangle\Big)_{i,j=1}^{k}, \tag{74}$$

wobei $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) = \big(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_i}(x),\ldots,\frac{\partial\phi_n}{\partial x_i}(x)\big)$. Da die Matrix symmetrisch ist, braucht man übrigens nicht alle Einträge einzeln auszurechnen, was zusätzlich Arbeit spart!

Definition 10.6 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Karte, d.h. es existiere eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Karte $\phi\colon U \to M$ mit Bild $\phi(U) = M$. Wir definieren das *Oberflächenmaß* $S_M : \mathcal{B}(M) \to [0,\infty[$ *auf* M als das Bildmaß

$$S_M \;:=\; \phi_*\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k|_U(x)\Big)$$

des Maßes $\sqrt{g_\phi(x)}\, d\lambda|_U(x)$ auf $(U,\mathcal{B}(U))$ mit Dichte $\sqrt{g_\phi}$ bzgl. $\lambda_k|_U$ unter der (stetigen und daher) messbaren Abbildung $\phi\colon (U,\mathcal{B}(U)) \to (M,\mathcal{B}(M))$.

Bemerkung 10.7 Das Oberflächenmaß S_M ist also ein Maß auf dem Messraum $(M,\mathcal{B}(M))$, wobei $\mathcal{B}(M)$ die Borelsche σ-Algebra von M ist (hierbei ist M mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Metrik versehen). Die in der Definition gegebene Beschreibung von S_M macht klar, dass dies wirklich ein Maß ist. In einer expliziten Formel bedeutet die Definition, dass

$$S_M(E) \;=\; \int_{\phi^{-1}(E)} \sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x) \qquad \text{für alle } E \in \mathcal{B}(M). \tag{75}$$

Insbesondere ist also $S_M(M)$ durch die im zweiten Teil der Motivation **10.1** plausibel gemachten Formel (für $\mathrm{Vol}_k(M)$) gegeben.

In der vorigen Situation nennt man $S_M(E)$ das *k-dimensionale Volumen* der Borelmenge $E \subseteq M$. Übrigens steht das "S" in S_M für das englische Wort "surface."

Hinweis: Das suggestive Symbol "Vol_k", das uns für die Zwecke der Motivation gute Dienste leistete, wird im Folgenden nicht mehr benutzt.

Beispiel 10.8 (Oberflächenmaß auf einem Funktionsgraphen). Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $h\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Aus Beispiel 9.24 wissen wir, dass dann der Graph

$$M \;:=\; \big\{(x,h(x))\colon x \in U\big\}$$

eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k+1}$ ist und $\phi\colon U \to M$, $\phi(x) := (x,h(x))$ eine globale Karte. Wir zeigen nun:

Die Gramsche Determinante von ϕ ist

$$g_\phi(x) \;=\; 1 + \|\mathrm{grad}\, h(x)\|_2^2\,. \tag{76}$$

Somit ist das Oberflächenmaß auf dem Graphen M gegeben durch die Formel

$$S_M(E) \;=\; \int_{\phi^{-1}(E)} \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\, h(x)\|_2^2}\; d\lambda_k(x) \qquad \textit{für } E \in \mathcal{B}(M),$$

wobei $\phi^{-1}(E) = \mathrm{pr}_1(E)$ *mit* $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k,\ (x,y) \mapsto x$. *Insbesondere ergibt sich für das k-dimensionale Volumen des Graphen M*

$$S_M(M) \;=\; \int_U \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\, h(x)\|_2^2}\; d\lambda_k(x)\,. \tag{77}$$

Beweis: Wir haben

$$J_x(\phi) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k \\ J_x(h) \end{pmatrix}$$

und

$$G_\phi(x) \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k & J_x(h)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k \\ J_x(h) \end{pmatrix} \;=\; \mathbf{1}_k + J_x(h)^t J_x(h)\,,$$

wobei $\mathbf{1}_k$ die $k \times k$-Einheitsmatrix ist.

1. Fall: Ist $h'(x) = 0$, so ist $G_\phi(x) = \mathbf{1}_k$ und somit $g_\phi(x) = \det G_\phi(x) = \det \mathbf{1}_k = 1 = 1 + \|\mathrm{grad}\, h(x)\|_2^2$; also gilt (76).

2. Fall: Sei nun $h'(x) \neq 0$. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $G_\phi(x)$. Ist $v \in \ker h'(x)$, so ist $J_x(h)v = 0$ und somit $G_\phi(x)v = v$. Alle Vektoren $\neq 0$ aus dem $(k-1)$-dimensionalen Kern von $h'(x)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sind also Eigenvektoren von $G_\phi(x)$ zum Eigenwert 1. Außerdem ist für den Vektor $\mathrm{grad}\, h(x) \in \mathbb{R}^k$, den wir uns als Zeilenvektor denken,

$$\begin{aligned} G_\phi(x)\big(\mathrm{grad}\, h(x)\big)^t &= \big(\mathrm{grad}\, h(x)\big)^t - \big(\mathrm{grad}\, h(x)\big)^t \mathrm{grad}\, h(x) \big(\mathrm{grad}\, h(x)\big)^t \\ &= \Big(1 + \|\mathrm{grad}\, h(x)\|_2^2\Big)\big(\mathrm{grad}\, h(x)\big)^t\,, \end{aligned}$$

so dass $\mathrm{grad}\, h(x)$ Eigenvektor von $G_\phi(x)$ zum Eigenwert $1 + \|\mathrm{grad}\, h(x)\|_2^2$ ist. Da $\big(\mathrm{grad}\, h(x)\big)^t$ senkrecht auf $\ker h'(x)$ steht,[40] haben wir damit k paarweise orthogonale Eigenvektoren gefunden. Weil die Determinante von $G_\phi(x)$ das Produkt der Eigenwerte der Matrix $G_\phi(x)$ ist, erhalten wir (76).

Beispiel 10.9 Mit den vorigen Formeln kann man ganz konkret Flächeninhalte ausrechnen. Betrachten wir z.B. die Funktion

$$h\colon]{-1},1[^2 \to \mathbb{R}\,, \quad h(x,y) \;:=\; \sqrt{1-x^2}\,,$$

so ist der Graph $M := \{(x,y,h(x,y)) \colon (x,y) \in]{-1},1[^2\}$ ein halber Zylinder(mantel), der sich über dem Quadrat $]{-1},1[^2$ wölbt. Was ist der Flächeninhalt von M? Da

$$\mathrm{grad}\, h(x,y) \;=\; \Big(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ 0\Big)$$

[40] Es ist ja $h'(x).y = \langle \mathrm{grad}\, h(x)^t, y\rangle$ für $y \in \mathbb{R}^k$.

mit $1 + \|\operatorname{grad} h(x,y)\|_2^2 = \frac{1}{1-x^2}$, erhalten wir mit Formel (77) den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} S_M(M) &= \int_{]-1,1[^2} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x,y)\|_2^2}\; d\lambda_2(x,y) \\ &= \int_{]-1,1[^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\lambda_2(x,y) \;=\; \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\, dy \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, du\, dy \;=\; 2\pi\,, \end{aligned}$$

wobei der Satz von Fubini benutzt wurde und anschließend die Substitution $x = \sin u$ zur Berechnung des inneren Integrals.

Bisher haben wir die Frage ignoriert, ob das Oberflächenmaß S_M wohldefiniert ist, unabhängig von der Wahl der globalen Karte ϕ. Glücklicherweise gibt es keine Probleme:

Lemma 10.10 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offene Mengen und $\phi\colon U \to M$, $\psi\colon V \to M$ globale Karten. Dann gilt*

$$\phi_*\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k|_U(x)\Big) \;=\; \psi_*\Big(\sqrt{g_\psi(x)}\; d\lambda_k|_V(x)\Big)\,,$$

d.h. S_M ist unabhängig von der Wahl der globalen Karte.

Beweis. Nach Satz 9.26 ist $\tau := \phi^{-1}\circ\psi\colon V \to U$ ein Diffeomorphismus. Da $\psi = \phi\circ\tau$, gilt nach der Kettenregel $J_x(\psi) = J_{\tau(x)}(\phi)\circ J_x(\tau)$ für alle $x \in V$. Daraus folgt

$$G_\psi(x) \;=\; J_x(\psi)^t J_x(\psi) \;=\; J_x(\tau)^t J_{\tau(x)}(\phi)^t J_{\tau(x)}(\phi) J_x(\tau)$$

und somit $g_\psi(x) = \det G_\psi(x) = (\det J_x(\tau))^2\, g_\phi(\tau(x)) = (\det \tau'(x))^2\, g_\phi(\tau(x))$. Mit der Transformationsformel erhalten wir für alle $E \in \mathcal{B}(M)$ nun wie gewünscht

$$\begin{aligned} \int_{\psi^{-1}(E)} \sqrt{g_\psi(x)}\; d\lambda_k(x) &= \int_V \underbrace{\mathbf{1}^V_{\psi^{-1}(E)}(x)}_{=\mathbf{1}^U_{\phi^{-1}(E)}(\tau(x))} \sqrt{g_\phi(\tau(x))}\,|\det\tau'(x)|\; d\lambda_k(x) \\ &= \int_U \mathbf{1}^U_{\phi^{-1}(E)}(x)\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x) \\ &= \int_{\phi^{-1}(E)} \sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x)\,. \end{aligned}$$

□

Integrale bzgl. des Oberflächenmaßes kann man explizit wie folgt ausrechnen:

Lemma 10.11 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Karte $\phi : \mathbb{R}^k \supseteq U \to M$. Eine messbare Funktion $f : (M, \mathcal{B}(M)) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist genau dann bzgl. S_M über M integrierbar, wenn die Funktion*

$$U \to \overline{\mathbb{R}}\,, \quad x \mapsto f\big(\phi(x)\big)\sqrt{g_\phi(x)}$$

bzgl. des Lebesgue-Borel-Maßes λ_k über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\,\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x)\,. \tag{78}$$

Die vorige Formel gilt auch für beliebige messbare Funktionen $f\colon M \to [0,\infty[$.

Beweis. Aufgrund der Allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.6) und dem Satz über Integration bzgl. Maßen mit Dichten (Satz 5.1) ist jedes der folgenden Integrale genau dann definiert, wenn die anderen es sind, und die Integrale stimmen in diesem Falle überein:

$$\begin{aligned}\int_M f\, dS_M \;&\overset{\text{def}}{=}\; \int_M f\, d\phi_*\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k|_U(x)\Big) \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\,\Big(\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x)\Big)\\ &=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\,\sqrt{g_\phi(x)}\; d\lambda_k(x)\,.\end{aligned}$$

□

Beispiel 10.12 Wir betrachten den Fall $k = 1$. Sei $U = \,]a,b[\, \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, die eine Einbettung ist. Nach Beispiel 9.23 ist das Bild $M := \phi(U)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit globaler Karte ϕ. Aus

$$G_\phi(x) \;=\; J_x(\phi)^t J_x(\phi) \;=\; \langle \phi'(x), \phi'(x)\rangle \;=\; \|\phi'(x)\|_2^2$$

erhalten wir $g_\phi(x) = \|\phi'(x)\|_2^2$ und damit

$$S_M(M) \;=\; \int_U \|\phi'(x)\|_2\; d\lambda_1(x) \;=\; \int_a^b \|\phi'(x)\|_2\; dx\,.$$

Das ist die Formel, die in der Analysis II für die Länge der stetig differenzierbaren Kurve ϕ gefunden wurde (vgl. Forster 2, §4, Satz 1). Das Integral einer integrierbaren (oder nichtnegativen messbaren) Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \int_U f\big(\phi(x)\big)\,\|\phi'(x)\|_2\; d\lambda_1(x)\,;$$

für stetiges f erhalten wir also $\int_a^b f(\phi(x))\,\|\phi'(x)\|\,dx$, das übliche Wegintegral aus der Analysis 2.

Beispiel 10.13 (Integrale über Funktionsgraphen). Wie in Beispiel 10.8 betrachten wir den Graphen $M \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ einer stetig differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R}^k \supseteq U \to \mathbb{R}$. In diesem Falle können wir das Integral einer messbaren Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ bzgl. S_M über M mit der folgenden Formel explizit ausrechnen:

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \int_U f\big(x, h(x)\big)\,\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2}\; d\lambda_k(x) \tag{79}$$

wann immer eines (und somit beide) der Integrale definiert sind (siehe (78) und (76)).

Beispiel 10.14 (Integrale über die obere Halbsphäre). Ein interessanter Spezialfall eines Funktionsgraphen ist die k-dimensionale obere Halbsphäre vom Radius $r > 0$,

$$M \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : \|x\|_2 = r,\; x_{k+1} > 0\}\,;$$

diese ist der Graph der Funktion $h\colon U := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_2 < r\} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) \;:=\; \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2} \;=\; \sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_k^2}\,.$$

Wegen $\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j}{h(x)}$ folgt für $\phi(x) := (x, h(x))$ mit (76)

$$g_\phi(x) \;=\; 1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2 \;=\; 1 + \frac{\|x\|_2^2}{h(x)^2} \;=\; \frac{h(x)^2 + \|x\|_2^2}{h(x)^2} \;=\; \frac{r^2}{r^2 - \|x\|_2^2}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_M f\, dS_M \;&=\; \int_{\|x\|_2 < r} f\Big(x, \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2}\Big) \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|x\|_2^2}}\, d\lambda_k(x) \\ &=\; \int_{\|y\|_2 < 1} f\Big(ry, r\sqrt{1 - \|y\|_2^2}\Big) \frac{r^k}{\sqrt{1 - \|y\|_2^2}}\, d\lambda_k(y) \qquad (80)\end{aligned}$$

für jede integrierbare oder nicht-negative messbare Funktion $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei wir $x = ry$ substituiert haben.

10.2 Das Oberflächenmaß im allgemeinen Fall

Wir schauen uns nun ganz beliebige Untermannigfaltigkeiten M an, die im allgemeinen nicht mehr durch eine einzige Karte beschrieben werden können.[41] Zuerst überlegen wir uns, dass man immerhin nur *abzählbar viele* Karten zur Beschreibung von M braucht.

Lemma 10.15 *Für jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Karten $\phi_j\colon \mathbb{R}^k \supseteq U_j \to M$ derart, dass $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(U_j)$.*

Beweis. Nach dem Parametrisierungssatz (Satz 9.21) gibt es zu jedem $a \in M$ eine offene Umgebung $V_a \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass $V_a \cap M = \psi_a(W_a)$ für eine Karte $\psi_a\colon W_a \to M$ von M. Nach Verkleinern von V_a können wir annehmen, dass

$$V_a \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - q_a\|_2 < r_a\}$$

mit einem geeigenten Punkt $q_a \in \mathbb{Q}^n$ und $0 < r_a \in \mathbb{Q}$. Da es nur abzählbar viele solcher Mengen gibt und da jeder Punkt $a \in M$ in einer solchen Menge liegt, ist $\{V_a : a \in M\}$ eine abzählbare Überdeckung von M. Wir können daher aus den Karten ψ_a eine geeignete Folge von Karten ϕ_j auswählen. □

In praktischen Anwendungen genügen meist endlich viele Karten, um M zu überdecken.

[41] Hierbei werden wir uns in der Vorlesung auf die wesentlichen neuen Ideen konzentrieren und einige technische Details auslassen, die im Skript jedoch vollständig ausgearbeitet sind.

Definition 10.16 Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so definiert man das *Oberflächenmaß* $S_M \colon \mathcal{B}(M) \to [0,\infty]$ *auf* M wie folgt:

Man wählt eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Karten $\phi_j : \mathbb{R}^k \supseteq U_j \to M$ mit $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(U_j)$ und eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Borelmengen $A_j \in \mathcal{B}(M)$ mit [42]

$$M \;=\; \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \quad \text{und} \quad A_j \;\subseteq\; \phi_j(U_j) \tag{81}$$

und definiert

$$S_M(E) \;:=\; \sum_{j=1}^{\infty} S_{\phi_j(U_j)}(E\cap A_j) \quad \text{für } E \in \mathcal{B}(M) \tag{82}$$

unter Benutzung der Oberflächenmaße $S_{\phi_j(U_j)}$ auf den Untermannigfaltigkeiten $\phi_j(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit globaler Karte ϕ_j (wie in Definition 10.6 beschrieben).

Bemerkung 10.17 Zur Berechnung von $S_M(E)$ zerhacken wir die Menge E also einfach in die paarweise disjunkten Stücke $E\cap A_j$, welche jeweils in einer Untermannigfaltigkeit mit globaler Karte liegen, und summieren dann die k-dimensionalen Volumina der Stücke auf.

Bemerkung 10.18 Um uns klarzumachen, dass S_M ein Maß ist, schreiben wir

$$S_M \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \tag{83}$$

mit $\mu_j \colon \mathcal{B}(M) \to [0,\infty]$, $\mu_j(E) := S_{\phi_j(U_j)}(E\cap A_j)$. Da $S_{\phi_j(U_j)}$ ein Maß auf $\phi_j(U_j)$ (versehen mit der Borelschen σ-Algebra) ist, folgt sofort, dass μ_j ein Maß auf $(M, \mathcal{B}(M))$ ist. Als Reihe von Maßen ist nach Satz 5.9 dann auch S_M ein Maß.

Machen wir uns an einer ganz vertrauten Situation klar, was vorige Definition bedeutet:

Beispiel 10.19 Nach Beispiel 9.5 ist die Kreislinie $\mathbb{S}_1$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Da $\mathbb{S}_1$ kompakt ist, kann $\mathbb{S}_1$ nicht durch eine einzige Karte $\phi \colon \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{S}_1$ beschrieben werden. [43] Jedoch können wir $\mathbb{S}_1$ durch zwei Karten beschreiben, z.B. durch

$$\phi_1 \colon \,]-\pi,\pi[\, \to \mathbb{S}_1\,, \qquad \phi_1(x) \;:=\; \big(\cos x,\, \sin x\big)$$

mit Bild $M_1 := \operatorname{im}\phi_1 = \mathbb{S}_1\setminus\{(-1,0)\}$ und die durch die gleiche Formel gegebene Abbildung $\phi_2 : \,]0,2\pi[\, \to \mathbb{S}_1$ mit Bild $M_2 := \operatorname{im}\phi_2 = \mathbb{S}_1 \setminus \{(1,0)\}$. Dann sind $A_1 := M_1 = \operatorname{im}\phi_1$

[42] Man kann beispielsweise $A_1 := \phi_1(U_1)$, $A_j := \phi_j(U_j) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \phi_i(U_i)$ für $j \geq 2$ nehmen.

[43] Andernfalls wäre die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ als stetiges Bild $\phi^{-1}(\mathbb{S}_1)$ der kompakten Menge $\mathbb{S}_1$ kompakt, was unmöglich ist.

und $A_2 := \{(-1,0)\} \subseteq \operatorname{im} \phi_2$ paarweise disjunkte Borelmengen, die $\mathbb{S}_1$ überdecken.[44] Da $g_{\phi_j}(x) = \|\phi_j'(x)\|_2^2 = 1$ (vgl. Beispiel 10.12), erhalten wir für jede Borelmenge $E \subseteq \mathbb{S}_1$

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{S}_1}(E) &= S_{M_1}(E \cap A_1) \;+\; S_{M_2}(E \cap A_2) \;=\; \int_{\phi_1^{-1}(E)} 1 \, d\lambda_1 + \int_{\phi_2^{-1}(E \cap A_2)} 1 \, d\lambda_1 \\ &= \lambda_1(\phi_1^{-1}(E)) + \lambda_1(\phi_2^{-1}(E \cap A_2)) \;=\; \lambda_1(\phi_1^{-1}(E)) \,; \end{aligned}$$

hierbei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass $\phi_2^{-1}(E \cap A_2)$ eine höchstens einpunktige Menge ist und daher das Maß 0 hat. Insbesondere erhalten wir für das eindimensionale Volumen des Kreises $S_{\mathbb{S}_1}(\mathbb{S}_1) = \lambda_1\big(]-\pi,\pi[\big) = 2\pi$ (den üblichen Kreisumfang).

Natürlich müssen wir wieder nachprüfen, dass S_M stets wohldefiniert ist.

Lemma 10.20 *Das Oberflächenmaß S_M auf einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ ist wohldefiniert, unabhängig von der gewählten Folge von Karten $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und der Überdeckung $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ durch paarweise disjunkte Borelmengen.*

Beweis. Seien $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Folgen von Karten $\phi_j \colon U_j \to M$ und $\psi_j \colon V_j \to M$ mit $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(U_j) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \psi_j(V_j)$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sowie $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Folgen paarweise disjunkter Borelmengen $A_j, B_j \in \mathcal{B}(M)$ derart, dass $A_j \subseteq \phi_j(U_j) =: M_j$, $B_j \subseteq \psi_j(V_j) =: N_j$ und $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$. Es sei S_M das mithilfe von $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gemäß (82) definierte Obeflächenmaß, und $\widetilde{S}_M$ das analog unter Benutzung von $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definierte Maß.

Sind $i, j \in \mathbb{N}$, so ist $P := M_i \cap N_j$ als offene Teilmenge von M_i eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $\phi_i|_{\phi_i^{-1}(P)}$ als globaler Karte, woraus sofort $S_P = S_{M_i}|_P$ folgt. Nach dem gleichen Argument ist aber auch $S_P = S_{N_j}|_P$ und somit

$$S_{M_i}|_{M_i\cap N_j} \;=\; S_{N_j}|_{M_i \cap N_j} \qquad \text{für alle } i,j \in \mathbb{N}. \tag{84}$$

Für jede Borelmenge $E \in \mathcal{B}(M)$ erhalten wir wegen $E \cap A_i = E \cap A_i \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (E \cap A_i \cap B_j)$ somit

$$\begin{aligned} S_M(E) &= \sum_{i=1}^\infty S_{\phi_i(U_i)}(E \cap A_i) \;=\; \sum_{i=1}^\infty S_{\phi_i(U_i)}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (E \cap A_i \cap B_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty S_{\phi_i(U_i)}(E \cap A_i \cap B_j) \;=\; \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty S_{\psi_j(V_j)}(E \cap A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty S_{\psi_j(V_j)}(E \cap A_i \cap B_j) \;=\; \cdots \;=\; \widetilde{S}_M(E)\,. \end{aligned}$$

Hierbei beruht das vierte Gleichheitszeichen auf (84), das fünfte auf dem Doppelreihensatz (Folgerung 3.27); anschließend (bei "…") wiederholt man die ersten drei Rechenschritte rückwärts, mit vertauschten Rollen. □

Übrigens kann man das Oberflächenmaß wie folgt charakterisieren:

[44] Um Def. 10.16 wortwörtlich anzuwenden, sollten wir z.B. noch $\phi_j := \phi_2$ und $A_j := \emptyset$ für $j \geq 3$ setzen.

Bemerkung 10.21 Das Oberflächenmaß S_M das einzige Maß auf M derart, dass für jede Karte $\phi\colon U \to M$

$$S_M|_{\phi(U)} \;=\; S_{\phi(U)} \tag{85}$$

gilt, mit $S_{\phi(U)}$ wie in Definition 10.6.

[Die Eindeutigkeit ist klar. Da wir in Definition 10.16 stets $\phi_1 := \phi$ und $A_1 := \phi(U)$ wählen können (siehe die dortige Fußnote), erhalten wir wie gewünscht (85)].

Bemerkung 10.22 Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $W \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so ist $S_M|_W = S_W$. Jede Karte $\phi\colon U \to W$ von W ist nämlich auch eine Karte von M und somit $S_W|_{\phi(U)} = S_{\phi(U)} = S_M|_{\phi(U)} = \big(S_M|_W\big)|_{\phi(U)}$. Die Eindeutigkeitsaussage in der vorigen Bemerkung liefert nun $S_W = S_M|_W$.

Oft kommt man nach Weglassen von Nullmengen mit sehr wenigen (häufig sogar einer einzigen!) Karte aus, obwohl M selbst nicht durch eine globale Karte beschrieben werden kann (wie z.B. beim Kreis $\mathbb{S}_1$ in Beispiel 10.19); dies kann den Rechenaufwand enorm verringern. Es ist somit sehr wichtig, S_M-Nullmengen als solche erkennen zu können.

Satz 10.23 (Erkennen von Nullmengen). *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ mit Bild $f(U) \subseteq M$, wobei $\ell < k$. Dann ist $f(U) \in \mathcal{B}(M)$ eine Borelmenge und $S_M(f(U)) = 0$.*

Beweis. Nach Satz 8.4 ist $f(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und somit auch $f(U) \in \mathcal{B}(M)$, da $f(U) \subseteq M$. Nach Lemma 10.15 gibt es eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Karten $\phi_j : U_j \to M$ von M mit $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(U_j)$. Da

$$f(U) \;=\; \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \underbrace{f(U) \cap \phi_j(U_j)}_{=:\,N_j},$$

brauchen wir nur noch zu zeigen, dass $S_M(N_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es ist

$$S_M(N_j) \;=\; \int_{\phi_j^{-1}(N_j)} \sqrt{g_{\phi_j}(x)}\; d\lambda_k(x)\;;$$

dieses Integral verschwindet wie gewünscht, wenn der Integrationsbereich $\phi_j^{-1}(N_j)$ eine λ_k-Nullmenge ist. Nun ist aber $W := f^{-1}(\phi_j(U_j))$ eine offene Teilmenge von U und

$$h\colon W \to \mathbb{R}^k\,, \quad h(x) \;:=\; \phi_j^{-1}(f(x))$$

nach Lemma 9.27 eine stetig differenzierbare Funktion, mit Bild $h(W) = \phi_j^{-1}(N_j)$. Da $\ell < k$, ist nach Satz 8.4 wie gewünscht $\phi_j^{-1}(N_j) = h(W)$ eine λ_k-Nullmenge. $\square$

Mithilfe des Oberflächenmaßes S_M können wir Funktionen über M integrieren. Der folgende Satz beschreibt explizit, wie die so erhaltenen Integrale ausschauen:

Satz 10.24 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Karten $\phi_j : U_j \to M$ mit Bild $M_j := \phi_j(U_j)$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Borelmengen $A_j \in \mathcal{B}(M)$, wie in Definition* 10.16. *Ist $f : (M, \mathcal{B}(M)) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine messbare Funktion, so gilt:*

(a) *Ist $f \geq 0$, so ist*

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f\, dS_{M_j}\,, \tag{86}$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite explizit mit der Formel (78) *aus Lemma* 10.11 *berechnet werden können, da M_j eine Untermannigfaltigkeit mit globaler Karte ϕ_j ist.*

(b) *f ist genau dann bzgl. S_M über M integrierbar, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} |f|\, dS_{M_j} < \infty$; in diesem Fall gilt* (86).

Beweis. Mit Bezeichnungen wie in Bemerkung 10.18 haben wir $S_M = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$; nach Satz 5.9 ist also

$$\int_M f\, dS_M \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\, d\mu_j$$

falls $f \geq 0$ oder f bzgl. S_M integrierbar ist, wobei letzteres genau dann der Fall ist, wenn $\int_M |f|\, dS_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\, d\mu_j < \infty$. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, dass

$$\int_M f\, d\mu_j \;=\; \int_{M_j} f\, dS_{M_j}\,. \tag{87}$$

Bezeichnet $\lambda_j \colon M_j \to M$, $\lambda_j(x) := x$ die Inklusion, so ist

$$\mu_j(E) \;=\; S_{M_j}(E \cap A_j) \;=\; S_{M_j}(\lambda_j^{-1}(E \cap A_j)) \;=\; (\lambda_j)_*(S_{M_j})(E \cap A_j) \;=\; \int_E \mathbf{1}_{A_j}^M\, d(\lambda_j)_*(S_{M_j})$$

für alle $E \in \mathcal{B}(M)$ und somit ist μ_j das Maß auf $(M, \mathcal{B}(M))$ mit Dichte $\mathbf{1}_{A_j}^M$ bzgl. des Bildmaßes $(\lambda_j)_*(S_{M_j})$. Aus dem Satz über Integration bzgl. Maßen mit Dichten (Satz 5.1) und der Allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.6) folgt nun, dass das Integral auf der linken Seite von (87) genau dann definiert ist, wenn das Integral auf der rechten Seite es ist, und die Integrale in diesem Fall übereinstimmen. Die Behauptung folgt. □

Hier sind einige Beispiele.

Beispiel 10.25 (Integrale über die Einheitssphäre). Die Abbildung

$$P \,:\,]0, \pi[\, \times\,]{-\pi}, \pi[\, \to \mathbb{S}_2 \;\subseteq\; \mathbb{R}^3\,, \quad P(\theta, \phi) \;:=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

ist nach Beispiel 9.15 eine Immersion und man sieht leicht, dass sie auch injektiv ist. Da $\mathbb{S}_2$ nach Beispiel 9.6 eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist, ist P nach Lemma 9.28 automatisch eine Karte von $\mathbb{S}_2$ (man könnte natürlich auch mühsam die weiteren Eigenschaften einer Karte von Hand nachprüfen). Wir behaupten:

Für jede integrierbare (oder nicht-negative messbare) Funktion $f\colon \mathbb{S}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int_{\mathbb{S}_2} f\; dS_{\mathbb{S}_2} \;=\; \int_{]0,\pi[} \int_{]-\pi,\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big)\; \sin\theta\; d\lambda_1(\phi) d\lambda_1(\theta)\,. \tag{88}$$

Insbesondere ergibt sich für das 2-dimensionale Volumen (Flächeninhalt) der Einheitssphäre

$$S_{\mathbb{S}_2}(\mathbb{S}_2) \;=\; \int_{\mathbb{S}_2} 1\; dS_{\mathbb{S}_2} \;=\; \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\; d\phi\, d\theta \;=\; 4\pi\,.$$

Beweis: Die gewählte Karte P ist besonders schön, denn ihr Bild ist "fast alles": Das Komplement des Bildes ist

$$\mathbb{S}_2 \setminus \operatorname{im} P \;=\; \{(x,y,z)\colon y=0,\ x\le 0 \text{ und } x^2+z^2=1\}\,,$$

ein Halbkreis. Dieser ist im Bild der stetig differenzierbaren Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (\cos(x), 0, \sin(x))$ enthalten und somit nach Satz 10.23 eine $S_{\mathbb{S}_2}$-Nullmenge und somit eine Borelmenge vom Maß 0 (da er kompakt ist). Da man messbare Mengen vom Maß 0 beim Integrieren weglassen darf, erhalten wir für jede integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{S}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_2} f\; dS_{\mathbb{S}_2} \;&=\; \int_{\operatorname{im} P} f\; dS_{\mathbb{S}_2} \;=\; \int_{\operatorname{im} P} f\; dS_{\operatorname{im} P} \;=\; \int_{]0,\pi[\,\times\,]-\pi,\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big)\; \sqrt{g_P(\theta,\phi)}\; d\lambda_2(\theta,\phi)\\
&=\; \int_{]0,\pi[\,\times\,]-\pi,\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big)\; \sin(\theta)\; d\lambda_2(\theta,\phi)\\
&=\; \int_{]0,\pi[} \int_{]-\pi,\pi[} f\big(P(\theta,\phi)\big)\; \sin\theta\; d\lambda_1(\phi)\, d\lambda_1(\theta)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini benutzt und eine explizite Formel für die Gramsche Determinante $g_P(\theta,\phi)$ eingesetzt haben: Da

$$J_{(\theta,\phi)}(P) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

nach Beispiel 9.15, ist der Maßtensor gegeben durch

$$G_P(\theta,\phi) \;=\; \begin{pmatrix} \langle \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi),\ \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi)\rangle & \langle \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi),\ \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi)\rangle \\ \langle \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi),\ \frac{\partial P}{\partial\theta}(\theta,\phi)\rangle & \langle \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi),\ \frac{\partial P}{\partial\phi}(\theta,\phi)\rangle \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(siehe (74) in Bemerkung 10.5) und somit $g_P(\theta,\phi) = \det G_P(\theta,\phi) = \sin^2\theta$.

Beispiel 10.26 (Integrale über Rotationsflächen). Wir nehmen nun Beispiel 9.13 und die dortige Notation wieder auf, wobei wir nun annehmen, dass γ (und somit Φ) eine Immersion ist und $M := \operatorname{im}\Phi$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ (was sich mit Satz 9.14 häufig leicht nachprüfen lässt). Nach Lemma 9.28 ist dann $\Phi|_U$ eine Karte für M, für jede offene Teilmenge $U \subseteq I \times \mathbb{R}$ derart, dass $\Phi|_U$ injektiv ist. Wir erinnern an Formel (66):

$$J_{(t,\phi)}(\Phi) \;=\; \begin{pmatrix} r'(t)\cos\phi & -r(t)\sin\phi \\ r'(t)\sin\phi & r(t)\cos\phi \\ \zeta'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Maßtensor und die Gramsche Determinante erhalten wir daher

$$G(t,\phi) \;=\; \begin{pmatrix} r'(t)^2 + \zeta'(t)^2 & 0 \\ 0 & r^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t,\phi) \;=\; r(t)^2\,\|\gamma'(t)\|_2^2$$

mit $\gamma(t) = (r(t), \zeta(t))$. In typischen Beispielen[45] kann man ein offenes Intervall $J \subseteq I$ finden derart, dass $\Phi|_{J\times\,]0,2\pi[}$ injektiv ist und $M \setminus \Phi(J\times\,]0,2\pi[)$ eine S_M-Nullmenge (um dies nachzuprüfen, kann Satz 10.23 von Nutzen sein). Für jede integrierbare (oder nicht-negative messbare) Funktion $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ ist somit

$$\int_M f\; dS_M \;=\; \int_J \int_{]0,2\pi[} f\big(\Phi(t,\phi)\big)\, r(t)\,\|\gamma'(t)\|_2\; d\lambda_1(\phi) d\lambda_1(t)\,.$$

Für $f \equiv 1$ ergibt sich insbesondere für das 2-dimensionale Volumen (Flächeninhalt) von M

$$S_M(M) \;=\; \int_J \int_{]0,2\pi[} r(t)\,\|\gamma'(t)\|_2\; d\lambda_1(\phi)\, d\lambda_1(t) \;=\; 2\pi \int_J r(t)\|\gamma'(t)\|_2\; d\lambda_1(t)\,.$$

Lemma 10.27 (Verhalten unter Homothetien). *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $r > 0$, so ist auch $rM := \{rx : x \in M\}$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f\colon rM \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. S_{rM} über rM integrierbar, wenn die Funktion $M \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto f(rx)$ bzgl. S_M über M integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{rM} f(x)\; dS_{rM} \;=\; r^k \int_M f(rx)\; dS_M\,.$$

Insbesondere gilt $S_{rM}(rM) = r^k S_M(M)$.

Beweis. Ist $\phi : U \to M$ eine Karte von M, so ist $r\phi : U \to rM$ eine Karte von rM. Hieraus folgt, dass rM ebenfalls eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter folgt aus $(r\phi)'(x) = r\phi'(x)$ für die Gramschen Determinanten von ϕ bzw. $r\phi$, dass $g_{r\phi}(x) = r^{2k} g_\phi(x)$, d.h. $\sqrt{g_{r\phi}(x)} = r^k\sqrt{g_\phi(x)}$. Folglich gilt

$$S_{rM}(rE) \;=\; r^k S_M(E)$$

[45] Z.B. im Falle des 2-dimensionalen Torus, den wir uns in der Übung näher anschauen.

für jede Borelmenge $E \subseteq M$. Mithilfe des Homöomorphismus $\theta\colon rM \to M$, $\theta(x) := r^{-1}x$ können wir vorige Formel ausdrücken als

$$\theta_*(S_{rM}) \;=\; r^k S_M\,.$$

Die Behauptungen folgen nun mit der Allgemeinen Transformationsformel (Satz 5.6). □

Satz 10.28 *Es sei $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Für $r > 0$ sei $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r\}$ die Sphäre vom Radius r. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n \;=\; \int_{]0,\infty[} \int_{S_r} f(x)\, dS_{S_r}(x)\, d\lambda_1(r) \;=\; \int_{]0,\infty[} \int_{S_1} r^{n-1} f(ry)\, dS_{S_1}(y)\, d\lambda_1(r)\,. \tag{89}$$

Beweis. Sei $H_\pm := \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$. Dann ist $f = f\mathbf{1}_{H_+} + f\mathbf{1}_{H_-}$ fast überall, denn $\{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n = 0\}$ ist eine Nullmenge. Da $S_r \cap \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n = 0\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge ist (vgl. Satz 10.23), genügt es, die Behauptung für jede der Funktionen $f\mathbf{1}_{H_\pm}$ zu zeigen. Wir führen dies für $f\mathbf{1}_{H_+}$ durch und nehmen gleich an, dass f außerhalb H_+ verschwindet.

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\|_2 < 1\}$. Die Abbildung

$$\Phi\colon U\times\,]0,\infty[\, \to H_+ \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\,,\;\; (x,r) \mapsto \Big(rx, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2}\Big)$$

ist bijektiv und hat die stetig differenzierbare Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}(y) \;=\; \Big(\frac{y_1}{\|y\|_2}, \dots, \frac{y_{n-1}}{\|y\|_2}, \|y\|_2\Big)$$

(Nachrechnen!). Also ist Φ ein Diffeomorphismus.

Wir betrachten nun $F : U \to \mathbb{R}$, $F(x) := \sqrt{1 - \|x\|_2^2}$. Dann ist $(\operatorname{grad} F)(x) = -\frac{x}{F(x)}$ (als Zeilenvektor) sowie $\Phi(x,r) = (rx, rF(x)) = r(x, F(x))$. Folglich ist

$$J_{(x,r)}(\Phi) \;=\; \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & r & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{r(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) \end{pmatrix}.$$

Wir klammern r aus der ersten bis $(n-1)$-ten Zeile aus, subtrahieren dann das x_j-fache der j-ten Spalte von der letzten Spalte für $j = 1, \dots, n-1$ und entwickeln schließlich die

Determinante nach der letzten Zeile:

$$\begin{aligned}
\det J_{(x,r)}(\Phi) &= r^{n-1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ & (\operatorname{grad} F)(x) & & & F(x) \end{pmatrix} \\
&= r^{n-1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ & (\operatorname{grad} F)(x) & & & F(x) - \langle (\operatorname{grad} F)(x), x\rangle \end{pmatrix} \\
&= r^{n-1}\Big(F(x) - \Big\langle (\operatorname{grad} F)(x), x\Big\rangle\Big) = r^{n-1}\Big(F(x) + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)}\Big) \\
&= \frac{r^{n-1}}{F(x)}\Big(F(x)^2 + \|x\|_2^2\Big) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}\,.
\end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\int_{H_+} f\, d\lambda_n &= \int_{U\times\,]0,\infty[} f\Big(rx, r\sqrt{1-\|x\|_2^2}\Big)\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}\, d\lambda_n(x,r) \\
&= \int_{]0,\infty[}\int_U \frac{f(rx, r\sqrt{1-\|x\|_2^2})}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}\, r^{n-1}\, d\lambda_{n-1}(x)\, dr\,.
\end{aligned}$$

Nach (80) ist das innere Integral gleich $\int_{S_r} f\, dS_{S_r}$. Hieraus folgt die erste Gleichheit in (89), und die zweite bekommt man mit Lemma 10.27. □

Bemerkung 10.29 Wie beim Satz von Fubini erhalten wir durch die Aufspaltung $f = f_+ - f_-$ eine Variante von Satz 10.28 für integrierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei das innere Integral über S_r dann im allgemeinen nur für r außerhalb einer Borelmenge von Maß 0 definiert ist.

Beispiel 10.30 Es sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\}$ und $\mathbb{S}_{n-1} = \partial B_n$. Wir wollen das $(n-1)$-dimensionale Volumen $w_n := S_{\mathbb{S}_{n-1}}(\mathbb{S}_{n-1})$ der $(n-1)$-dimensionalen Einheitsphäre $\mathbb{S}_{n-1}$ berechnen. Wir erinnern daran, dass das ("gewöhnliche") n-dimensionale Volumen von B_n durch $c_n = \lambda_n(B_n) = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ gegeben ist (siehe Formel (46) in Kapitel 6). Wir wenden nun Satz 10.28 auf die charakteristische Funktion von B_n an und finden

$$c_n = \int_{B_n} d\lambda_n(x) = \int_{]0,1[}\int_{\mathbb{S}_{n-1}} r^{n-1}\, dS_{\mathbb{S}_{n-1}}(y)\, d\lambda_1(r) = w_n\int_0^1 r^{n-1}\, dr = \frac{w_n}{n}\,.$$

Somit ist

$$w_n \;=\; n\,c_n \;=\; n\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \;=\; 2\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

Insbesondere erhalten wir

- $w_2 = 2\pi$ (Länge des Einheitskreisbogens)
- $w_3 = 4\pi$ (Oberfläche der zweidimensionalen Einheitssphäre)
- $w_4 = 2\pi^2$ (dreidimensionales Volumen von $\mathbb{S}_3 \subseteq \mathbb{R}^4$).

Bemerkung 10.31 Während wir das Oberflächenmaß durch "Zerhacken in Stücke" definiert haben, werden in der Literatur (z.B. in Forsters "Analysis 3") Integrale über Untermannigfaltigkeiten (und Oberflächenmaße) häufig anders konstruiert, mithilfe sogenannter "Zerlegungen der Eins" (vgl. auch Kapitel 12). Für praktische Rechnungen ist dieser andere Zugang *völlig unbrauchbar*.

Teil V : Integralsätze

Ein zentrales Resultat der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen ist der Hauptsatz, der besagt, dass

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir können diesen Satz betrachten als eine Beziehung zwischen den Werten von F auf dem Rand $\partial[a,b] = \{a,b\}$ von $[a,b]$ und den Werten von F' im Inneren von $[a,b]$. Das Ziel dieses letzten Teils der Vorlesung sind Verallgemeinerungen der vorigen Beziehung. Der allgemeine Stokessche Integralsatz

$$\int_{\partial M} \omega \;=\; \int_M d\omega \tag{90}$$

für Differentialformen, den wir hier nicht behandeln können, liefert eine weitreichende und elegante Verallgemeinerung des Hauptsatzes.[46] Wir betrachten lediglich Spezialfälle von (90): den Gaußschen Integralsatz, den klassischen Stokesschen Integralsatz im Raum und den Greenschen Integralsatz in der Ebene.

11 Kompakta mit glattem Rand

Der Gaußsche Integralsatz ist eines der wichtigsten Resultate der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über einen Bereich im $\mathbb{R}^n$ und einem Oberflächenintegral über dem Rand des Bereiches. Wir beweisen ihn nur für spezielle Bereiche: *Kompakta mit glattem Rand*.

Definition 11.1 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge (ein *Kompaktum*). Das Kompaktum K hat einen *glatten Rand*, wenn es zu jedem Randpunkt $p \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass

(a) $K \cap U = \{x \in U \colon \psi(x) \leq 0\}$ und

(b) $\psi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Beispiel 11.2 Sei $r > 0$. Die Kugel $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq r\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand, denn $\psi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) := \|x\|_2^2 - r^2$ leistet das Gewünschte.

Lemma 11.3 *In der Situation von Definition* 11.1 *gilt* $\partial K \cap U \;=\; \{x \in U \colon \psi(x) = 0\}$.

[46]Mehr darüber finden Sie z.B. in Forsters Analysis 3 (bzw. später einmal noch allgemeiner in “Fundamentals of Differential Geometry” von Serge Lang, Kapitel XVII, erschienen im Springer-Verlag).

Beweis. Sei zunächst $x \in \partial K \cap U$. Da K kompakt ist, ist K abgeschlossen. Damit ist $x \in K$ und $\psi(x) \leq 0$. Wäre $\psi(x) < 0$, so wäre $\{y \in U : \psi(y) < 0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die in K liegt und x enthält. Dies widerspricht $x \in \partial K$. Also ist $\psi(x) = 0$.

Sei nun $x \in U$ und $\psi(x) = 0$. Dann ist $x \in K$, und wir zeigen, dass x Randpunkt von K ist. Wegen $\psi'(x) \neq 0$ ist $\psi'(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ surjektiv. Es gibt also ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\psi'(x)v > 0$. Nun ist

$$0 \;<\; \psi'(x)v \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x+tv) - \psi(x)}{t} \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x+tv)}{t}\,.$$

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\psi(x+tv) > 0$ für alle $t \in \,]0, \varepsilon[\,$. Folglich liegen für hinreichend großes n die Punkte $x + \frac{1}{n}v$ nicht in K. Wegen $x + \frac{1}{n}v \to x$ folgt nun $x \in \partial K$. $\square$

Beispiel 11.4 Die Sphäre $\mathbb{S}_2$ ist zwar auch kompakt und sieht glatt aus (sie ist ja eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$), aber sie ist kein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^3$ im Sinne von Definition 11.1. Jedes (nicht-leere) Kompaktum mit glattem Rand hat nämlich ein nicht-leeres Inneres (vgl. Beweis von Lemma 11.3), was bei $\mathbb{S}_2$ nicht der Fall ist.

Folgerung 11.5 *Der Rand eines Kompaktums $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Nach Definition 11.1 und Lemma 11.3 finden wir zu jedem $p \in \partial K$ eine stetig differenzierbare Funktion $\psi \colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Umgebung U von p derart, dass

$$\partial K \cap U \;=\; \{x \in U : \psi(x) = 0\}$$

und $\operatorname{grad} \psi(p) \neq 0$. Also ist ∂K eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. $\square$

Für den Gaußschen Integralsatz benötigen wir das (äußere) *Normalenfeld* von ∂K. Dazu definieren wir zunächst allgemein Tangential- und Normalenvektoren.

Definition 11.6 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.

(a) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Tangentialvektor an M in p*, wenn ein $\varepsilon > 0$ und ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$ existieren. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p bezeichnen wir mit $T_p(M)$.

(b) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt ein *Normalenvektor an M in p*, wenn er auf $T_p(M)$ senkrecht steht (d.h. wenn $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_p(M)$). Die Menge aller Normalenvektoren an M in p bezeichnen wir mit $N_p(M)$.

Den Tangentialraum $T_p(M)$ kann man wie folgt beschreiben:

Lemma 11.7 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\phi \colon U \to M$ eine Karte von M. Dann ist*

$$T_{\phi(x)}(M) \;=\; \operatorname{im} \phi'(x) \qquad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^k$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $x + tv \in U$ für alle t aus $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Wir betrachten den Weg

$$\gamma\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to M\,, \quad \gamma(t) \;:=\; \phi(x + tv)\,.$$

Für diesen ist $\gamma(0) = \phi(x)$ und $\gamma'(0) = \phi'(x)v$. Also ist $\operatorname{im}\phi'(x) \subseteq T_{\phi(x)}(M)$. Für die umgekehrte Inklusion sei $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = p$. Da $\phi(U)$ offen in M ist und γ stetig, ist dann $\gamma^{-1}(\phi(U))$ offen in $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Nach Verkleinern von ε dürfen wir also $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq \phi(U)$ annehmen. Nach Lemma 9.27 ist dann

$$\phi^{-1} \circ \gamma\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to U \subseteq \mathbb{R}^k$$

stetig differenzierbar. Da $\gamma = \phi \circ (\phi^{-1} \circ \gamma)$, liefert die Kettenregel $\gamma'(0) = \phi'(x).(\phi^{-1} \circ \gamma)'(0) \in \operatorname{im}\phi'(x)$. □

Insbesondere stellen wir fest, dass $T_p(M)$ ein k-dimensionaler und $N_p(M)$ ein $(n-k)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist und dass

$$T_p(M) \oplus N_p(M) \;=\; \mathbb{R}^n\,.$$

Beispiel 11.8 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $h\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist der Graph M von h nach Beispiel 9.24 eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k+1}$, mit einer globalen Karte $\phi\colon U \to M$, $\phi(x) := (x, h(x))$. Da $T_p(M)$ die Dimension k hat, ist $N_p(M)$ eindimensional für jeden Punkt $p \in M$. Es gibt daher genau zwei Normalenvektoren in $N_p(M)$, deren Länge 1 ist. Wie sehen diese explizit aus? Einer davon ist der folgende Vektor (und der andere dessen Negatives):

$$\nu(\phi(x)) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x)\|_2^2}} \big(-\operatorname{grad} h(x),\ 1\big)\,. \tag{91}$$

Per Definition ist nämlich $\nu(\phi(x))$ ein Einheitsvektor, und berechnen der Skalarprodukte zeigt, dass $\nu(\phi(x))$ auf $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = (e_j, \frac{\partial h}{\partial x_j}(x))$ senkrecht steht für $j \in \{1, \ldots, k\}$, so dass also $\nu(\phi(x)) \in N_{\phi(x)}(M)$. Nach (91) ist übrigens $\nu \circ \phi : U \to \mathbb{R}^{k+1}$ stetig, somit auch $\nu\colon M \to \mathbb{R}^{k+1}$.

Ist $M = \partial K$ der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand, so ist $N_p(\partial K)$ für jeden Punkt $p \in M$ ein eindimensionaler Vektorraum. Es gibt also genau zwei Normalenvektoren der Länge 1. Wir wollen denjenigen auszeichnen, der “nach außen zeigt.”

Satz 11.9 *Es sei K ein Kompaktum mit glattem Rand ∂K.*

(a) *Für jedes $p \in \partial K$ gibt es genau einen Vektor $\nu(p) \in N_p(\partial K)$ der Länge 1 mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $p + t\nu(p) \notin K$ für alle $t \in]0, \varepsilon[$.*

(b) *Die Abbildung $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

Der Vektor $\nu(p)$ heißt der *äußere Normalenvektor an ∂K in p*, und ν heißt das *äußere Normalenfeld* von K.

Beweis. *Existenz eines äußeren Normalenvektors*: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi'(p) \neq 0$ und $U \cap K = \{x \in U\colon \psi(x) \leq 0\}$. Wir zeigen, dass

$$\nu(p) \;:=\; \frac{1}{\|\operatorname{grad}\psi(p)\|_2}\operatorname{grad}\psi(p) \tag{92}$$

ein äußerer Normalenvektor ist. Ist $\gamma : \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[\to \partial K$ ein Weg mit $\gamma(0) = p$ und ist ε so klein, dass $\gamma(t) \in U$ für alle $t \in \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[$, so ist nach Lemma 11.3

$$\psi\big(\gamma(t)\big) \;=\; 0 \quad \text{für alle } t \in \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[.$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $\psi'(p)\gamma'(0) = 0$. Folglich steht der Vektor $\operatorname{grad}\psi(p)$ und damit auch $\nu(p)$ senkrecht auf $T_p(\partial K)$. Klar ist auch $\|\nu(p)\|_2 = 1$. Die außerdem geforderte Eigenschaft folgt wegen

$$\psi'(p)\big(\nu(p)\big) \;=\; \frac{\langle \operatorname{grad}\psi(p), \operatorname{grad}\psi(p)\rangle}{\|\operatorname{grad}\psi(p)\|_2} \;=\; \|\operatorname{grad}\psi(p)\|_2 \;>\; 0$$

wie in der zweiten Hälfte des Beweises von Lemma 11.3.

Eindeutigkeit des äußeren Normalenvektors: Wir haben bereits bemerkt, dass es genau zwei Normalenvektoren der Länge 1 gibt und dass einer davon der Vektor $\nu(p)$ aus (92) ist. Wie im Beweis von Lemma 11.3 sieht man nun, dass $\psi(a - t\nu(p)) < 0$ für $t > 0$ hinreichend nahe bei Null. Also ist $a - t\nu(p) \in K$ für solche t, d.h. der Vektor $-\nu(p)$ erfüllt nicht die zusätzliche Bedingung aus (a).

Stetigkeit von ν: Diese folgt sofort aus Darstellung (92). $\square$

Beispiel 11.10 Es sei $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq r\}$ die Kugel um 0 vom Radius r und $\psi\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $\psi(x) := \|x\|_2^2 - r^2$ (siehe Beispiel 11.2). Für $p \in \partial K$ ist $\operatorname{grad}\psi(p) = 2p$, und damit ist wegen (92) der Vektor $\nu(p) = \frac{2}{\|2p\|}\,p = \frac{1}{r}\,p$ der zugehörige äußere Normalenvektor.

Beispiel 11.11 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, die zudem eine Einbettung ist. Wir interessieren uns für die Normalenvektoren an die Fläche $\psi(U)$. Für $x \in U$ haben wir $T_{\phi(x)}(\phi(U)) = \operatorname{im}\phi'(x)$, und da ϕ eine Immersion ist, ist dies ein 2-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Es gibt im Punkt $p := \phi(x)$ also genau 2 Normalenvektoren der Länge 1. Wir legen einen Normalenvektor $\nu(p)$ dadurch fest, dass wir

$$\det\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x), \nu(p)\Big) \;>\; 0$$

verlangen, d.h. die Vektoren

$$X_1(p) := \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x), \quad X_2(p) := \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x) \quad \text{und} \quad \nu(p)$$

sollen ein Rechtssystem bilden. Mit dieser Information können wir $\nu(p)$ direkt berechnen:

$$\nu(p) = \frac{X_1(p) \times X_2(p)}{\|X_1(p) \times X_2(p)\|},$$

wobei $v \times w$ das *Vektorprodukt* der Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist, d.h.

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 & - & v_3 w_2 \\ v_3 w_1 & - & v_1 w_3 \\ v_1 w_2 & - & v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

(wobei die "Determinante" nur als Gedächtnisstütze zu betrachten ist).

Ist speziell $\phi(x) = (x, h(x))$ für eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$, so ist

$$X_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \qquad X_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix},$$

also

$$X_1(p) \times X_2(p) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher (wie in Beispiel 11.8)

$$\nu(p) = \nu\Big(\phi(x)\Big) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x_1}(x))^2 + (\frac{\partial h}{\partial x_2}(x))^2}} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $\nu(\phi(x))$ der "obere" Normalenvektor an den Graphen von f.

Beispiel 11.12 In diesem Beispiel geht es darum, den Rand eines Kompaktums mit glattem Rand lokal als Graphen einer Funktion h darzustellen und den äußeren Normalenvektor mit Hilfe von h zu beschreiben.

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $p \in \partial K$. Wir wählen eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit $K \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$ und $\psi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Nach Lemma 11.3 ist dann

$$\partial K \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Wegen $\psi'(p) \neq 0$ dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(p) \neq 0$. Sei etwa $\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(p) > 0$ (den Fall $\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(p) < 0$ diskutiert man analog). Nach Verkleinern von U dürfen wir dann annehmen, dass

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_n}(x) \;>\; 0 \qquad \text{für alle } x \in U. \tag{93}$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir dann eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall $]b,c[\, \subseteq \mathbb{R}$ mit $W := V\times\,]b,c[\, \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon V \to\,]b,c[$ derart, dass

$$\partial K \cap \big(V\times\,]b,c[\big) \;=\; \big\{(x,h(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in V\big\}\,,$$

d.h. $\partial K \cap W$ ist der Graph von h. Wegen (93) ist dann

$$K \cap \big(V\times\,]b,c[\big) \;=\; \big\{x \in W : x_n \leq h(x')\big\}\,,$$

wobei wir $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ geschrieben haben, und es ist weiter

$$\nu(p) \;=\; \frac{\big(-\operatorname{grad} h(p'),\, 1\big)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(p')\|_2^2}} \tag{94}$$

mit $p = (p', p_n)$ (vgl. Beispiel 11.8).

Schließlich vermerken wir eine weitere Eigenschaft kompakter Mengen. Wir erinnern daran, dass der *Durchmesser* einer Teilmenge M eines metrischen Raumes (X,d) durch

$$\operatorname{diam} M \;:=\; \sup\{d(x,y) : x,y \in M\} \;\in\; [0,\infty]$$

definiert ist.

Satz 11.13 (Lebesguesches Lemma). *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X,d) und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ (eine sogenannte* Lebesguesche Zahl der Überdeckung) *derart, dass jede Teilmenge M von X mit* $\operatorname{diam} M \leq \lambda$ *und $M \cap K \neq \emptyset$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und $r > 0$ sei $B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$. Zu jedem Punkt $x \in K$ gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, findet man ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{2\varepsilon(x)}(x) \subseteq U_i$. Nun bildet die Familie $(B_{\varepsilon(x)}(x))_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, lässt sich daraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h. es gibt Punkte $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon(x_j)}(x_j)\,.$$

Wir setzen $\lambda := \min(\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_m))$. Sei nun $M \subseteq X$ eine Teilmenge mit $M \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} M \leq \lambda$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $x \in M \cap K$, und es gibt ein j mit $d(x, x_j) < \varepsilon(x_j)$. Für jedes $y \in M$ ist dann

$$d(y,x_j) \;\leq\; d(y,x) + d(x,x_j) \;<\; \lambda + \varepsilon(x_j) \leq 2\varepsilon(x_j)\,,$$

d.h. $M \subseteq B_{2\varepsilon(x_j)}(x_j)$. Nach Konstruktion ist aber die Kugel $B_{2\varepsilon(x_j)}(x_j)$ (und damit auch die Menge M) in einer der Mengen U_i enthalten. $\square$

12 Der Gaußsche Integralsatz

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so heißt die Funktion

$$\operatorname{div} F : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

die *Divergenz* des Vektorfelds F.

Satz 12.1 (Gaußscher Integralsatz). *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die K umfasst. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F\colon V \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_K \operatorname{div} F \, d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)\,. \tag{95}$$

Bemerkung 12.2 Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch für Kompakta, deren Ränder niedrigdimensionale Singularitäten wie Ecken und Kanten aufweisen. Auch die Voraussetzung, dass F auf einer ganzen Umgebung von K definiert ist, lässt sich abschwächen.

Bemerkung 12.3 Andere, insbesondere unter Physikern gebräuchliche Notationen sind

$$\int_{\partial K} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} \;:=\; \int_{\partial K} \vec{F} \bullet d\vec{S} \;:=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)\,.$$

Bemerkung 12.4 (Physikalische Interpretation). Da $\nu(x)$ ein Einheitsvektor ist, haben wir $\langle F(x), \nu(x)\rangle = \|F(x)\| \cdot \cos\alpha(x)$, wobei $\alpha(x) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $F(x)$ und $\nu(x)$ ist. Es ist also $\langle F(x), \nu(x)\rangle$ die Länge der orthogonalen Projektion von $F(x)$ auf $\nu(x)$. Ein Physiker stellt sich $\langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x)$ als den durch das Oberflächenelement $dS(x)$ austretenden Fluss des Vektorfeldes F vor. Demzufolge wird das Integral

$$\int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x)$$

als Gesamtfluss durch die Oberfläche von K interpretiert. Ist das Vektorfeld F *quellenfrei*, d.h. ist $\operatorname{div} F = 0$, so ergibt sich

$$\int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial K}(x) \;=\; 0\,, \tag{96}$$

d.h. der Gesamtfluss durch den Rand des Kompaktums verschwindet.[47] Diese Situation tritt z.B. auf, wenn wir die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachten und $F(x)$ die Stromdichte an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ (= Geschwindigkeit an Stelle x mal Massendichte) ist (zu einem festen Zeitpunkt). Die Inkompressibilität entspricht der Bedingung $\operatorname{div} F = 0$. Das Verschwinden des Gesamtflusses durch ∂K kann man sich in diesem Fall so veranschaulichen, dass ja die Flüssigkeitsmenge (Masse), die sich innerhalb von K befindet, wegen der Inkompressibilät dem Volumen von K entspricht, also konstant ist. Daher ist die Massenbilanz in K ausgewogen: zu jedem Zeitpunkt fließt gleichviel hinein wie hinaus.

[47] Gilt umgekehrt (96) für jedes Kompaktum $K \subseteq V$ mit glattem Rand, so ist F quellenfrei, wie wir uns in der Übung überlegen. Quellenfreiheit ist also durch das Verschwinden der Integrale (96) charakterisiert.

Wir bereiten den Beweis des Gaußschen Integralsatzes vor, indem wir einige Werkzeuge bereitstellen und zwei Lemmas beweisen, die Spezialfälle behandeln und Teile des eigentlichen Beweises vorwegnehmen.

Stetige Funktionen mit kompaktem Träger; Zerlegungen der Eins

Zunächst einige Begriffe.

Definition 12.5 Ist M ein metrischer Raum und $f: M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nennt man den Abschluss

$$\operatorname{supp} f \;:=\; \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$$

den *Träger* von f. Wir schreiben $C(M)$ für den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf M und $C_c(M)$ für den Raum der Funktionen aus $C(M)$, deren Träger kompakt ist. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so bezeichne $C_c^k(U)$ den Raum der k-mal stetig diffenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in U.

Bemerkung 12.6 Beachten Sie: $f \in C(\mathbb{R}^n)$ liegt genau dann in $C_c(\mathbb{R}^n)$, wenn $\operatorname{supp} f$ beschränkt ist (da Träger per Definition abgeschlossen sind), und $f \in C(\,]a,b[\,)$ liegt genau dann in $C_c(\,]a,b[\,)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $\operatorname{supp} f \subseteq \,]a+\varepsilon, b-\varepsilon[$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_c^k(U)$, so liegt die durch

$$F(x) \;:=\; \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{für } x \neq U \end{cases}$$

definierte Fortsetzung von f durch 0 in $C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Ist nämlich $x \in U$, so stimmen f und F in einer Umgebung von x überein. Ist dagegen $x \notin U$, so ist $x \notin \operatorname{supp} f$, und da $\operatorname{supp} f$ abgeschlossen ist, ist das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(f)$ eine offene Umgebung von x, auf der F verschwindet.

Hat man erst einmal ein Beispiel einer Funktion mit kompaktem Träger (wie die folgende), so kann man diese benutzen, um Funktionen mit zusätzlichen erwünschten Eigenschaften daraus zu bauen:

Beispiel 12.7 Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) \;:=\; \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{1-t^2}\Big) & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Diese ist beliebig oft differenzierbar (dies beweist man ganz ähnlich wie in Forster 1, § 22, (22.2)), und ihr Träger ist $[-1,1]$ (so dass $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$).

12.8 (Eine glatte Zerlegung der Eins). Da die Funktion g aus Beispiel 12.7 einen kompakten Träger hat, ist die Funktion

$$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(t) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(t-k)$$

sinnvoll definiert (denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ sind nur endlich viele Summanden der Reihe von 0 verschieden). Genauere Betrachtung zeigt, dass für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und jede beschränkte Umgebung U von t_0 nur endlich viele Summanden der Reihe für $t \in U$ nicht identisch verschwinden; somit ist $G|_U \in C^\infty(U)$ und daher $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ (da t_0 beliebig war). Offensichtlich ist G zudem positiv und 1-periodisch. Also wird durch $h(t) := g(t)/G(t)$ eine Funktion aus $C_c^\infty(\mathbb{R})$ definiert. Für diese ist $\operatorname{supp} h = [-1,1]$ und es gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(t-k) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t-k)} \;=\; \frac{1}{G(t)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(t-k) \;=\; \frac{G(t)}{G(t)} \;=\; 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir nun $a_{p,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a_{p,\varepsilon}(x) \;:=\; h(\tfrac{x_1}{\varepsilon} - p_1) \cdot \ldots \cdot h(\tfrac{x_n}{\varepsilon} - p_n)\,.$$

Dann ist $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - \varepsilon p\|_\infty \le \varepsilon\}$, und man hat

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} a_{p,\varepsilon}(x) \;=\; 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Familie $(a_{p,\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ heißt eine (glatte) *Zerlegung der Eins* (auch: "Partition der Eins").

Bemerkung 12.9 Mit der Zerlegung $(a_{p,\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ der Eins können wir nun auch beliebige C^k-Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in C^k-Funktionen mit kompaktem Träger zerlegen: Es ist

$$f \;=\; f\cdot 1 \;=\; f \cdot \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} a_{p,\varepsilon} \;=\; \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f\cdot a_{p,\varepsilon}\,,$$

wobei $f a_{p,\varepsilon} \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in \mathbb{Z}^n$, mit Träger $\operatorname{supp}(f a_{p,\varepsilon}) \subseteq \operatorname{supp}(a_{p,\varepsilon})$.

Bemerkung 12.10 Zerlegungen der Eins werden in Analysis und Differentialgeometrie viel benutzt; mit ihrer Hilfe gelingt es häufig (wie weiter unten im Beweis des Gaußschen Integralsatzes), globale Probleme in lokale Probleme überzuführen. Sie dienen auch dazu, lokal definierte Objekte zu globalen zusammenzubauen.

Vorbereitende Lemmas

Lemma 12.11 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $j \in \{1,\ldots,n\}$. Dann gilt*

(a) $\int_U \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\, d\lambda_n = 0$ *für alle $\phi \in C_c^1(U)$.*

(b) $\int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,\psi\,d\lambda_n = -\int_U \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\,d\lambda_n$ *für alle* $\phi \in C_c^1(U)$ *und* $\psi \in C^1(U)$.

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $U = \mathbb{R}^n$ annehmen, da wir ψ durch 0 zu einer Funktion in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen können.

Da $\operatorname{supp}\phi$ kompakt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\operatorname{supp}\phi \subseteq [-R,R]^n$. Insbesondere verschwindet ϕ auf dem Rand des Würfels $[-R,R]^n$. Sei nun z.B. $j = 1$ (für die übrigen j verläuft der Beweis analog). Für alle $(x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist dann

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \;=\; \phi(R,x_2,\ldots,x_n) - \phi(-R,x_2,\ldots,x_n) \;=\; 0\,.$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)\,d\lambda_n(x) \;&=\; \int_{[-R,R]^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)\,d\lambda_n(x)\\ &=\; \int_{[-R,R]^{n-1}} \int_{-R}^{R} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x)\,dx_1\,d\lambda_{n-1}(x_2,\ldots,x_n) \;=\; 0\,.\end{aligned}$$

Das liefert Aussage (a), und für (b) wenden wir (a) auf die Funktion $\phi\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ an. Da $\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,\psi + \phi\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$ nach der Produktregel, folgt die Behauptung. □

Lemma 12.12 *Es sei* $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *offen,* $I = \,]a,b[\, \subseteq \mathbb{R}$ *und* $h\colon U' \to I$ *stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$E \;:=\; \big\{(x',x_n) \in U' \times I : x_n \le h(x')\big\} \;\; \textit{und} \;\; M \;:=\; \big\{(x',x_n) \in U' \times I : x_n = h(x')\big\}\,.$$

Dann gilt für jede Funktion $f \in C_c^1(U' \times I)$ *und jedes* $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,d\lambda_n(x) \;=\; \int_M f(x)\,\nu_j(x)\,dS_M(x)\,,$$

wobei $\nu_j(x)$ *die* j*-te Komponente des Normalenvektors*

$$\nu(x) \;:=\; \frac{\big(-\operatorname{grad} h(x'),\,1\big)}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}} \quad \textit{mit } x = (x',x_n) \tag{97}$$

ist (*vgl. Beispiel* 11.8).

Beweis. Wir erinnern zunächst daran, dass das Oberflächenintegral einer Funktion H auf M nach Beispiel 10.13 gegeben ist durch

$$\int_M H\,dS_M(x') \;=\; \int_{U'} H(x',h(x'))\,\sqrt{1+\|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}\;d\lambda_{n-1}(x')\,. \tag{98}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1: Sei $1 \leq j < n$. Für die Funktion

$$F\colon U' \times I \to \mathbb{R}\,, \quad F(x',z) \;:=\; \int_a^z f(x',x_n)\,dx_n$$

gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Satz 4.18

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x',z) \;=\; f(x',z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x',z) \;=\; \int_a^z \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',x_n)\,dx_n\,.$$

Hieraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^{h(x')} f(x',x_n)\,dx_n \;&=\; \frac{\partial}{\partial x_j} F\Big(x',h(x')\Big) \\
&=\; \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x',h(x')\Big)\frac{\partial h}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial F}{\partial x_j}\Big(x',h(x')\Big) \\
&=\; f\Big(x',h(x')\Big)\frac{\partial h}{\partial x_j}(x') + \int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',x_n)\;dx_n\,. \qquad (99)
\end{aligned}$$

Wir beachten nun, dass die Menge $L := \mathrm{pr}_1(\mathrm{supp} f) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt ist als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Abbildung $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$. Die Funktion $U' \to \mathbb{R}$, $x' \mapsto \int_a^{h(x')} f(x',x_n)\,dx_n$ verschwindet außerhalb L und hat somit einen kompakten Träger. Nach Lemma 12.11 (a) ist also

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_a^{h(x')} f(x',x_n)\,dx_n\right)\,d\lambda_{n-1}(x') \;=\; 0\,. \qquad (100)$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_E \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,d\lambda_n(x) \;=\; \int_{U'}\int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',x_n)\,dx_n\,d\lambda_{n-1}(x') \\
&=\; \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j}\int_a^{h(x')} f(x',x_n)\,dx_n\,d\lambda_{n-1}(x') - \int_{U'} f\big(x',h(x')\big)\frac{\partial h}{\partial x_j}(x')\,d\lambda_{n-1}(x') \\
&=\; \int_{U'} f(x',h(x'))\,\underbrace{\frac{-\frac{\partial h}{\partial x_j}(x')}{\sqrt{1+\|\mathrm{grad}\,h(x')\|_2^2}}}_{=\nu_j(x',h(x'))}\,\sqrt{1+\|\mathrm{grad}\,h(x')\|_2^2}\,d\lambda_{n-1}(x') \\
&=\; \int_M f(x)\,\nu_j(x)\,dS_M(x)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini benutzt haben, dann (99) zum Umschreiben des inneren Integrals, dann (100) und schließlich (98).

Fall 2: Sei $j = n$. Da für jedes $x' \in U'$ die Funktion $x_n \mapsto f(x', x_n)$ einen kompakten Träger hat, folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n \;=\; f\big(x', h(x')\big)\,,$$

so dass wieder

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, d\lambda_n(x) \;&=\; \int_{U'} \int_a^{h(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') \;=\; \int_{U'} f\big(x', h(x')\big)\, d\lambda_{n-1}(x') \\
&=\; \int_{U'} f\big(x', h(x')\big) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}}}_{\nu_n(x', h(x'))} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} h(x')\|_2^2}\; d\lambda_{n-1}(x') \\
&=\; \int_M f(x)\, \nu_n(x)\, dS_M(x)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Bemerkung 12.13 Sind U', I, h, E und M wie in Lemma 12.12 und $F = (F_1, \ldots, F_n)\colon U' \times I \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit $F_j \in C_c^1(U' \times I)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, so liefert Anwendung des Lemmas auf $f = F_j$:

$$\int_E \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_n(x) \;=\; \int_M F_j(x)\, \nu_j(x)\, dS_M(x) \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Summation über $j = 1, \ldots, n$ führt auf

$$\int_E \operatorname{div} F\, d\lambda_n \;=\; \int_M \big\langle F(x), \nu(x) \big\rangle\, dS_M(x)\,. \tag{101}$$

Beweis des Gaußschen Integralsatzes

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F\colon V \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $K \subseteq V$ ein Kompaktum in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Wir haben in Beispiel 11.12 gesehen, dass jeder Punkt $a \in \partial K$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat, in der sich ∂K als Graph einer Funktion darstellen lässt und $K \cap U$ die Menge derjenigen Punkte ist, die unter diesem Graphen liegen. Es existiert deshalb eine Familie $(U_j)_{j \in J}$ offener Teilmengen $U_j \subseteq V$ mit $K \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ derart, dass jedes U_j *eine* der folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) $U_j \subseteq K \setminus \partial K = \mathring{K}$ (Inneres von K); oder:

(b) Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten hat U_j die Form $U_j = U'\times\,]a,b[$, wobei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U' \to \mathbb{R}$ existiert derart, dass

$$U_j \cap K \;=\; \big\{(x',x_n) \in U'\times\,]a,b[\,: x_n \leq h(x')\big\}$$

und

$$U_j \cap \partial K \;=\; \big\{(x',x_n) \in U'\times\,]a,b[\,: x_n = h(x')\big\}\,.$$

Es sei λ eine Lebesguesche Zahl der Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ des Kompaktums K (siehe Satz 11.13) und $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$. Zu diesem ε betrachten wir die in **12.8** konstruierte glatte Zerlegung der Eins $(a_{p,\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$. Der Träger jeder Funktion $a_{p,\varepsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ε und hat somit den Durchmesser $2\varepsilon\sqrt{n} = \lambda$. Setze

$$P \;:=\; \{p \in \mathbb{Z}^n : \operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} \cap K \neq \emptyset\}\,.$$

Nach Definition der Lebesgueschen Zahl (siehe Satz 11.13) ist für jedes $p \in P$ dann der Träger $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon}$ in einer der Mengen U_j enthalten. Da K beschränkt ist, ist P eine endliche Menge. Wir benutzen nun die Zerlegung der Eins, um den Gaußschen Integralsatz auf den Fall zurückzuführen, wo sich alles in einer der Mengen U_j abspielt. Es ist

$$\int_K \operatorname{div} F\, d\lambda_n \;=\; \int_K \operatorname{div}\left(\sum_{p\in P} a_{p,\varepsilon}F\right) d\lambda_n \;=\; \sum_{p\in P}\int_K \operatorname{div}\,(a_{p,\varepsilon}F)\; d\lambda_n$$

und analog

$$\int_{\partial K} \big\langle F(x),\nu(x)\big\rangle\; dS_{\partial K}(x) \;=\; \sum_{p\in P}\int_{\partial K} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x),\nu(x)\big\rangle\; dS_{\partial K}(x)\,.$$

Zum Beweis von (95) müssen wir also nur zeigen, dass

$$\int_K \operatorname{div}\,(a_{p,\varepsilon}F)\; d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x),\nu(x)\big\rangle\; dS_{\partial K}(x) \tag{102}$$

für alle $p \in P$. Gemäß unserer Konstruktion ist für jedes $p \in P$ der Träger von $a_{p,\varepsilon}$ in einer der Mengen U_j enthalten. Ist $U_j \subseteq \overset{\circ}{K}$, so ist

$$\int_{\partial K} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x),\nu(x)\big\rangle\; dS_{\partial K}(x) \;=\; 0\,,$$

da $a_{p,\varepsilon}$ auf ∂K verschwindet. Da auch

$$\int_K \operatorname{div}\,(a_{p,\varepsilon}F)\; d\lambda_n \;=\; \int_{U_j} \operatorname{div}\,(a_{p,\varepsilon}F)\; d\lambda_n \;=\; \sum_{i=1}^{n}\int_{U_j} \frac{\partial(a_{p,\varepsilon}F)}{\partial x_j}\; d\lambda_n \;=\; 0$$

nach Lemma 12.11 (a), gilt (102) in diesem Fall. Genügt hingegen U_j der Bedingung (b), so gilt (102) nach Bemerkung 12.13. $\square$

Anwendung: Die Greensche Formel

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und ν das äußere Normalenfeld von K. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Ableitung in Normalenrichtung im Punkt* $a \in \partial K$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) \;:=\; \big\langle \operatorname{grad} f(a),\, \nu(a) \big\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, \nu_j(a)\,.$$

Weiter definieren wir für $f \in C^2(U)$

$$\Delta f \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \;:\; U \;\to\; \mathbb{R}$$

und nennen $\Delta: C^2(U) \to C(U)$, $f \mapsto \Delta f$ den *Laplace-Operator*.

Lemma 12.14 *Für $f, g \in C^2(U)$ und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt*

(a) $\operatorname{div}(fF) \;=\; f \operatorname{div} F + \langle \operatorname{grad} f, F \rangle$.

(b) $\operatorname{div} \operatorname{grad} F \;=\; \Delta f$.

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen und ist Hausaufgabe.

Satz 12.15 (Greensche Formel). *Für $f, g \in C^2(U)$ und K wie oben gilt*

$$\int_K (f\Delta g - g\Delta f)\, d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \Big(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \Big)\, dS_{\partial K}\,.$$

Beweis. Wir wenden den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld

$$F: U \to \mathbb{R}^3\,, \qquad F(x) \;:=\; f(x)\,(\operatorname{grad} g)(x) - g(x)\,(\operatorname{grad} f)(x)$$

an:

$$\int_K \operatorname{div} F\, d\lambda_n \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x) \rangle\, dS_{\partial K}(x)\,. \tag{103}$$

Nach Lemma 12.14 ist hier

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F \;&=\; \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) - \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) \\ &=\; f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle - g \operatorname{div}\big(\operatorname{grad} f\big) \\ &\qquad - \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle \;=\; f\Delta g - g\Delta f\,. \end{aligned} \tag{104}$$

Auf ∂K ergibt sich

$$\langle F,\, \nu \rangle \;=\; f\,\langle \operatorname{grad} g,\, \nu \rangle - g\,\langle \operatorname{grad} f,\, \nu \rangle \;=\; f\,\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\,. \tag{105}$$

Einsetzen von (104) und (105) in (103) liefert die Behauptung. □

13 Die Integralsätze von Green und Stokes

13.1 Der Greensche Integralsatz in der Ebene

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Umformulierung des Gaußschen Integralsatzes im 2-dimensionalen Fall, den Greenschen Integralsatz. Bevor wir ihn angeben und beweisen können, sei kurz an die verschiedenen Typen von Wegintegralen erinnert, die wir aus der Analysis II kennen.

In Beispiel 10.12 sind uns Wegintegrale skalarwertiger Funktionen der Gestalt

$$\int_I f(\gamma(t))\ \|\gamma'(t)\|_2\ dt$$

begegnet, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $f\colon \gamma(I) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. In diesem Kapitel benötigen wir nun eine andere Art von Wegintegralen (für vektor-wertige Funktionen), definiert wie folgt:

Definition 13.1 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $F = (F_1, \ldots, F_n)\colon \gamma(I) \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$\int_\gamma \langle F,\ d\vec{s}\,\rangle \ := \ \int_\gamma F_1\, dx_1 \ + \ \cdots \ + \ F_n\, dx_n \ := \ \sum_{j=1}^n \int_I F_j(\gamma(t))\, \gamma_j'(t)\ dt\,,$$

wann immer die beteiligten eigentlichen oder uneigentlichen Riemann-Integrale existieren (für ein kompaktes Intervall I ist dies automatisch erfüllt).[48]

Bemerkung 13.2 (a) Physiker würden für das Wegintegral $\int_\gamma \langle F,\, d\vec{s}\rangle$ eher $\int_\gamma \vec{F}(\vec{x})\bullet d\vec{s}$ oder $\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{x})\bullet d\mathbf{s}$ schreiben.

(b) Manchen (aber nicht allen) Hörern der Vorlesung sind in anderen Vorlesungen bereits "Pfaffsche Formen" begegnet; das Wegintegral aus Definition 13.1 entspricht dem Integral einer Pfaffschen Form längs des Weges γ. Wir werden den Formalismus Pfaffscher Formen nicht benutzen.

Unser Ziel ist nun die folgende Variante des Gaußschen Integralsatzes im $\mathbb{R}^2$ (wobei die Definition des Integrals auf der rechten Seite sofort nachgetragen wird):

Satz 13.3 (Greenscher Integralsatz). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F = (F_1, F_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ gilt dann*

$$\int_K \operatorname{div} F\ d\lambda_2 \ = \ \int_{\partial K} F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1\,. \tag{106}$$

[48] In diesem Kapitel bezeichnen wir mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ einerseits die Komponenten eines Weges γ; an anderer Stelle jedoch betrachten wir k Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ in $\mathbb{R}^2$. Es ist immer aus dem Zusammenhang klar, was gemeint ist.

Bemerkung 13.4 Der Rand ∂K eines Kompaktums K mit glattem Rand im $\mathbb{R}^2$ ist eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Wir werden im folgenden stets die Annahme machen, dass ∂K eine disjunkte Vereinigung

$$\partial K \ = \ \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$$

von endlich vielen geschlossenen C^1-Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ ist. In Wirklichkeit ist diese Annahme unnötig, sie ist automatisch erfüllt. Aus Zeitgründen wollen wir dies jedoch nicht beweisen. Für die wichtigsten Kompakta mit glattem Rand (Kreisscheibe, Kreisring, etc.) ist die Annahme offensichtlich erfüllt.

Allgemeiner gilt sogar:

Satz 13.5 *Jede 1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine disjunkte Vereinigung $M = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ von endlich vielen geschlossenen C^1-Kurven $\Gamma_j \subseteq \mathbb{R}^n$.* $\square$

In einem (nicht prüfungsrelevanten) Anhang zum Skript können Sie bei Interesse den Beweis nachlesen. Hierbei sind geschlossene C^1-Kurven wie folgt definiert:

Definition 13.6

(a) Ein auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierter C^1-Weg $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn er eine Immersion ist, also $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(b) Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossene C^1-Kurve*,[49] wenn es einen 1-periodischen, regulären C^1-Weg $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit Bild $\gamma(\mathbb{R}) = \Gamma$ gibt derart, $\gamma|_{[0,1[}$ injektiv ist.

Beispielsweise ist der Kreis $\mathbb{S}_1$ eine geschlossene C^1-Kurve in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung 13.7 Geschlossene C^1-Kurven in $\mathbb{R}^n$ sind übrigens kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Für Γ und γ wie in Definition 13.6 (b) gilt $\Gamma = \gamma([0,1])$ (denn γ ist 1-periodisch). Also ist Γ kompakt. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $\gamma|_{[a,a+\frac{1}{2}]}$ injektiv und somit $\gamma|_{]a,a+\frac{1}{2}[}$ eine Einbettung (siehe Lemma 9.20). Das Bild $W := \gamma(]a, a+\frac{1}{2}[)$ ist offen in Γ, denn es ist

$$W \ = \ \gamma([a, a+1]) \setminus \gamma([a+\tfrac{1}{2}, a+1])\,,$$

wobei $\gamma([a+\frac{1}{2}, a+1])$ kompakt und somit abgeschlossen ist. Also ist $\gamma|_{]a,a+\frac{1}{2}[}\colon]a, a+\frac{1}{2}[\to \Gamma$ eine Immersion mit offenem Bild, die eine Einbettung ist. Nach dem Parametrisierungssatz ist somit Γ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und vorige Abbildungen sind Karten. Mit Lemma 9.28 (oder direkt) sehen wir nun, dass sogar $\gamma|_{]a,a+1[}$ eine Karte für Γ ist, für alle $a \in \mathbb{R}$.

[49] Eigentlich sollte man solche Kurven auch noch "doppelpunktfrei" nennen, aber die Bezeichnung würde dann sehr schwerfällig.

Um das Integral über $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ auf der rechten Seite von (106) zu definieren, wobei $\Gamma_j = \gamma_j(\mathbb{R})$ mit einem 1-periodischen regulären C^1-Weg wie in Definition 13.6 (b), müssen wir alle Wege γ_j so wählen, dass K "links von γ_j liegt". Damit ist folgendes gemeint:

Definition 13.8 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $\gamma\colon I \to \partial K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^1-Weg, so sagen wir K *liegt links von* γ, wenn für jedes $t \in I$ der äußere Normalenvektor $\nu(\gamma(t))$ an ∂K und $\gamma'(t)$ ein Rechtssystem bilden, also

$$\det\Big(\nu(\gamma(t)),\ \gamma'(t)\Big) \ > \ 0 \tag{107}$$

(wobei die Vektoren als Spaltenvektoren zu verstehen sind).

Bemerkung 13.9 Ist $\gamma : I \to \partial K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^1-Weg, so ist $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(\partial K)$ und somit sind $\gamma(t)$ und $\nu(\gamma(t))$ zueinander orthogonale Vektoren. Weil beide Vektoren von Null verschieden sind, gilt also

$$h(t) \ := \ \det\Big(\nu(\gamma(t)),\ \gamma'(t)\Big) \ \neq \ 0\,.$$

Da $h : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass entweder $h(I) \subseteq]0, \infty[$ oder $h(I) \subseteq]-\infty, 0[$. Folglich liegt entweder K links von γ, oder K liegt links vom umgekehrten Weg $t \mapsto \gamma(-t)$.

Nun können wir endlich Integrale über ∂K definieren:

Definition 13.10 Ist $F\colon \partial K \to \mathbb{R}^2$ stetig, so definieren wir

$$\int_{\partial K} \langle F, d\vec{s}\rangle \ := \ \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j} \langle F, d\vec{s}\rangle\,,$$

wobei $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ mit paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven Γ_j und $\eta_j : I_j \to \Gamma_j$ auf offenen Intervallen $I_j \subseteq \mathbb{R}$ definierte Karten von Γ_j sind derart, dass $\Gamma_j \setminus \eta_j(I_j)$ einpunktig (und somit eine Nullmenge) ist und K links von η_j liegt (man nehme z.B. $\eta_j := \gamma_j|_{]0,1[}$ für einen 1-periodischen regulären C^1-Weg γ_j wie oben).

Wir müssten nun eigentlich zeigen, dass $\int_{\partial K}\langle F, d\vec{s}\rangle$ wohldefiniert ist, unabhängig von der Wahl der Karten η_j. Für das uns ausschließlich interessierende Integral auf der rechten Seite von (106) ist die Wohldefiniertheit jedoch automatisch, sobald wir den Satz bewiesen haben (denn wir erhalten stets die linke Seite).[50]

Eine nützliche Beobachtung ist:

Lemma 13.11 *Ist $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon I \to \partial K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein regulärer C^1-Weg und liegt K links von γ, so gilt*

$$\nu\big(\gamma(t)\big) \ = \ \frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}. \tag{108}$$

[50] Der Vollständigkeit halber zeigen wir im Anhang zu diesem Kapitel die Wohldefiniertheit allgemein.

Beweis. Vorübergehend schreiben wir $w(t)$ für den Vektor auf der rechten Seite von (108). Offensichtlich ist $\|w(t)\|_2 = 1$, und Ausrechnen zeigt

$$\langle \gamma'(t),\, w(t) \rangle \;=\; 0\,,$$

woraus $w(t) \in \big(T_{\gamma(t)}(\partial K)\big)^{\perp} = N_{\gamma(t)}(\partial K)$ folgt. Da $N_{\gamma(t)}(\partial K)$ eindimensional ist, folgt $w(t) = \nu(\gamma(t))$ oder $w(t) = -\nu(\gamma(t))$. Da

$$\det\Big(w(t),\ \gamma'(t)\Big) \;=\; \frac{\|\gamma'(t)\|_2^2}{\|\gamma'(t)\|_2} \;=\; \|\gamma'(t)\|_2 \;>\; 0$$

wie auch in (107), folgt $w(t) = \nu(\gamma(t))$. □

Beweis des Greenschen Integralsatzes. Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\int_K \operatorname{div} F\, d\lambda_2 \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x),\ \nu(x)\rangle\, dS_{\partial K}(x)\,.$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass

$$\int_{\partial K} F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1 \;=\; \int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle\, dS_{\partial K}(x)\,. \tag{109}$$

Wir führen den Beweis für den Fall, dass $\partial K = \Gamma$ eine geschlossene C^1-Kurve ist; der allgemeine Beweis für $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ geht ganz analog, man hat nur stets Γ (und seine Karte) durch die Kurven Γ_j (und ihre Karten) zu ersetzen und über $j = 1, \ldots, k$ zu summieren.

Sei nun also $\gamma\colon]a, b[\to \Gamma = \partial K$ eine Karte derart, dass K links von γ liegt und $\partial K \setminus \gamma(]a, b[)$ einpunktig ist. Wir berechnen die rechte und linke Seite von (109). Zunächst ist

$$\int_\gamma F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1 \;=\; \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\Big)\, dt$$

das Integral auf der linken Seite. Das rechte Integral in (109) berechnen wir zu

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \langle F(x), \nu(x)\rangle\, dS_{\partial K}(x) \;&=\; \int_{\gamma(]a,b[)} \big\langle F(x), \nu(x)\big\rangle\, dS_{\partial K}(x)\\
&=\; \int_a^b \big\langle F(\gamma(t)),\ \nu(\gamma(t))\big\rangle\, \|\gamma'(t)\|_2\, dt\\
&=\; \int_a^b \Big\langle F(\gamma(t)),\ \begin{pmatrix} \gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}\Big\rangle\, dt\\
&=\; \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\Big)\, dt\,;
\end{aligned}$$

hierbei wurde zuerst eine einpunktige Menge (Nullmenge)weggelassen, dann Beispiel 10.12 benutzt und schließlich die Formel (108) für das äußere Normalenfeld eingesetzt. Da beide Integrale übereinstimmen, folgt (109) und somit die Behauptung. □

13.2 Der Stokessche Integralsatz im Raum

Hält man eine geschlossene Drahtschlinge Γ in eine strömende Flüssigkeit, so hat man den Eindruck, man könne sagen, wieviel Flüssigkeit pro Zeit durch die Schlinge hindurchfließt. Ist $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, so würde man also gerne dem "Fluss von F durch die geschlossene Kurve Γ" einen Sinn geben.[51] Um dies zu erreichen, verfährt man, grob gesagt, wie folgt: Man "spannt eine Fläche G in Γ ein" (die also von Γ berandet wird) und berechnet den Fluss durch G.

Um diese Idee zu präzisieren, sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, die eine Einbettung ist. Dann ist $M := \phi(U)$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Sei nun $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist $G := \phi(K) \subseteq M$ eine kompakte Menge, die von der Kurve $\partial G = \phi(\partial K)$ berandet wird (denn $\phi: U \to M$ ist ein Homöomorphismus). Wir definieren den *Fluss eines stetigen Vektorfeldes F durch die Kurve ∂G* als das Integral

$$\int_G \big\langle F(x), \nu(x)\big\rangle \, dS_M(x), \tag{110}$$

wobei wir die Richtung des Normalenvektors so festlegen, dass

$$\det\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(p), \nu(\phi(p))\Big) \;>\; 0\,.$$

Natürlich ist dieses Vorgehen problematisch, denn der "Fluss von F durch Γ" könnte ja von der "eingespannten Fläche" G abhängen. Wir zeigen nun, dass für spezielle Felder (Rotationsfelder) das Integral (110) tatsächlich nur von der Randkurve ∂G abhängt, und stellen das Integral (110) als Kurvenintegral über den Rand dar.

Zur Erinnerung: Ist $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F\colon V \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein neues Vektorfeld $\operatorname{rot} F\colon V \to \mathbb{R}^3$, die *Rotation von F*, durch

$$\operatorname{rot} F \;:=\; \det\begin{pmatrix} e_1 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & F_1 \\ e_2 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & F_2 \\ e_3 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & F_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

(wobei die Determinantenschreibweise nur symbolisch zu verstehen ist).

Satz 13.12 (Stokesscher Integralsatz). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\phi: U \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Immersion, die eine Einbettung ist. Weiter sei $K \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von $G := \phi(K)$. Es sei $M := \phi(U)$ und $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$ das durch*

$$\nu\big(\phi(u)\big) \;=\; \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2} \tag{111}$$

[51] Auch in vielen anderen Anwendungen ist diese Denkweise wichtig, z.B. in der Elektrodynamik.

mit

$$X_1(u) \;:=\; \frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u_1}(u) \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad X_2(u) \;:=\; \frac{\partial \phi}{\partial u_2}(u) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

definierte Normalenfeld,[52] *wobei wir Elemente $u \in U$ als $u = (u_1, u_2)$ schreiben. Dann gilt*

$$\int_G \langle \operatorname{rot} F(x),\, \nu(x) \rangle \, dS_M(x) \;=\; \int_{\partial G} \big\langle F,\; d\vec{s} \big\rangle \,. \tag{112}$$

Hierbei ist das Integral auf der rechten Seite von (112) definiert als

$$\int_{\partial G} \big\langle F,\; d\vec{s} \big\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{k} \int_{\phi \circ \gamma_j} \big\langle F,\; d\vec{s} \big\rangle \,,$$

wobei $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ ist mit paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven Γ_j und $\gamma_j : I_j \to \Gamma_j$ Karten sind derart, dass K links von γ_j liegt und $\Gamma_j \setminus \gamma_j(I_j)$ einpunktig ist. Sobald wir (112) gezeigt haben, ist die Wohldefiniertheit des vorigen Integrals automatisch gewährleistet.

Beweis. Die Beweisstrategie ist, die Behauptung auf den Greenschen Integralsatz für ein geeignetes Vektorfeld auf U zurückzuführen.

Nachdem wir notfalls U durch $\phi^{-1}(V)$ ersetzt haben, dürfen wir annehmen, dass $M = \phi(U) \subseteq V$. Die Oberfläche des von den Vektoren $X_1(u)$ und $X_2(u)$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich $\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2$ und somit

$$\sqrt{g_\phi(u)} \;=\; \|X_1(u) \times X_2(u)\|_2 \tag{113}$$

(vgl. Motivation 10.1). Für das Oberflächenintegral erhalten wir somit

$$\begin{aligned} &\int_G \big\langle (\operatorname{rot} F)(x),\, \nu(x) \big\rangle \, dS_M(x) \\ &\qquad = \int_K \big\langle (\operatorname{rot} F)(\phi(u)), \nu(\phi(x)) \big\rangle \sqrt{g_\phi(u)} \, d\lambda_2(u) \\ &\qquad = \int_K \Big\langle (\operatorname{rot} F)(\phi(u)), \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2} \Big\rangle \, \|X_1(u) \times X_2(u)\|_2 \, d\lambda_2(u) \\ &\qquad = \int_K \Big\langle (\operatorname{rot} F)(\phi(u)),\, X_1(u) \times X_2(u) \Big\rangle \, d\lambda_2(u) \,, \end{aligned} \tag{114}$$

[52] Siehe Beispiel 11.11 und Aufgabe G42.

wobei die expliziten Formeln (111) und (113) eingesetzt wurden. Bevor wir weiterrechnen, beachten wir, dass beide Seiten von (112) linear von F abhängen. Wir können daher die Fälle, wo F nur eine von Null verschiedene Komponente hat, getrennt betrachten und nehmen o.B.d.A. $F_2 = F_3 = 0$ an. Dann ist

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

und mit den Bezeichnungen $\partial_j \phi_k := \frac{\partial \phi_k}{\partial u_j}$ vereinfacht sich der Integrand von (114) zu

$$\begin{aligned}
&\langle \operatorname{rot} F, X_1 \times X_2 \rangle = \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\partial_1\phi_3\partial_2\phi_1 - \partial_1\phi_1\partial_2\phi_3) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\partial_1\phi_1\partial_2\phi_2 - \partial_1\phi_2\partial_2\phi_1) \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_1\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_1\phi_2\Big)\partial_2\phi_1 - \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_2\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_2\phi_2\Big)\partial_1\phi_1 \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_1\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_1\phi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\partial_1\phi_1\Big)\partial_2\phi_1 \\
&\quad -\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\partial_2\phi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_2\phi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_2\phi_2\Big)\partial_1\phi_1 \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_1}\,\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\phi)}{\partial u_2}\,\frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}\,. \qquad (115)
\end{aligned}$$

Es ist $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ mit paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven Γ_j. Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass $\partial K = \Gamma$ eine geschlossene C^1-Kurve ist; der allgemeine Fall geht jedoch völlig analog, man hat nur überall Γ durch Γ_j zu ersetzen und über j zu summieren. Wir wählen eine Karte $\gamma : \,]a,b[\, \to \partial K$ derart, dass K links von γ liegt und $\partial K \setminus \gamma(]a,b[)$ einpunktig ist. Für das Kurvenintegral auf der rechten Seite von (112) erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
\int_{\phi\circ\gamma} F_1\, dx_1 &= \int_a^b F_1\Big((\phi\circ\gamma)(t)\Big)(\phi_1\circ\gamma)'(t)\, dt \\
&= \int_a^b F_1\Big((\phi\circ\gamma)(t)\Big)\Big(\frac{\partial\phi_1(\gamma(t))}{\partial u_1}\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial\phi_1(\gamma(t))}{\partial u_2}\,\gamma_2'(t)\Big)\, dt \\
&= \int_\gamma (F_1\circ\phi)\frac{\partial\phi_1}{\partial u_1}\, du_1 + (F_1\circ\phi)\frac{\partial\phi_1}{\partial u_2}\, du_2\,. \qquad (116)
\end{aligned}$$

Wir wollen den Greenschen Satz benutzen und betrachten dazu die beiden Integranden dieses Wegintegrals als Komponenten eines Vektorfeldes $H = (H_1, H_2) \colon U \to \mathbb{R}^2$:

$$H_1 \;:=\; (F_1 \circ \phi)\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2}\,, \quad H_2 \;:=\; -(F_1 \circ \phi)\frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} H \;&=\; \frac{\partial (F_1 \circ \phi)}{\partial u_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} + (F_1 \circ \phi)\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial (F_1 \circ \phi)}{\partial u_2}\,\frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} - (F_1 \circ \phi)\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u_1 \partial u_2} \\
&=\; \frac{\partial (F_1 \circ \phi)}{\partial u_1}\,\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial (F_1 \circ \phi)}{\partial u_2}\,\frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}\,,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\Big\langle (\operatorname{rot} F) \circ \phi, X_1 \times X_2 \Big\rangle \;=\; \operatorname{div} H\,. \tag{117}$$

Der Greensche Integralsatz liefert nun

$$\int_{\partial K} H_1\, du_2 \;-\; H_2\, du_1 \;=\; \int_K \operatorname{div} H \; d\lambda_2\,. \tag{118}$$

Die rechte Seite von (118) stimmt wegen (117), (115) und (114) mit dem Flächenintegral in (112) überein. In Anbetracht der Definition von H und (116) stimmt die linke Seite von (118) mit dem Kurvenintegral aus (112) überein. Also gilt (112). $\square$

A Existenz des Lebesgue-Borel-Maßes

In diesem (nicht prüfungsrelevanten) Anhang tragen wir u.a. die Existenz des Lebesgue-Borel-Maßes nach.[53]

Es empfiehlt sich, diesen Anhang erst nach Kapitel 5 zu lesen (oder noch später). Rein logisch gesehen jedoch kann der Anhang, was die Existenzaussagen angeht, direkt nach Kapitel 2 gelesen werden.[54] Der Beweis der Eindeutigkeitsaussagen benutzt den Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße (Folgerung 5.18).[55]

Wie in Kapitel 2 bereits angedeutet, ist für die Konstruktion von Maßen ein weiterer Typ von Mengensystemen nützlich, die sogenannten "Mengenringe". Auf solchen Mengenringen $\mathcal{R}$ kann man oft von Hand ein "Prämaß" definieren (eine gewisse Vorstufe eines Maßes). Anschließend setzt man mit dem sogenannten "Hahnschen Fortsetzungssatz" das Prämaß zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ fort.

Definition A.1 Es sei X eine Menge. Ein *Ring auf* X ist eine Menge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:

R1 $\emptyset \in \mathcal{R}$;

R2 $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;

R3 $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Bemerkung A.2 (a) Jede σ-Algebra ist ein Ring, aber nicht umgekehrt.

(b) Ein Ring $\mathcal{R}$ enthält mit je zwei Mengen A, B auch deren Durchschnitt, denn es ist $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

Für uns ist der folgende Ring von Interesse:

Definition A.3 Gegeben eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{F}(U)$ die Menge aller endlichen disjunkten Vereinigungen in U gelegener halboffener Quader. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen *Figuren in* U. Ist U aus dem Zusammenhang klar, so schreibt man auch $\mathcal{F} := \mathcal{F}(U)$.

Eine Figur in U ist also eine Menge $A \subseteq U$ der Form $A = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_k$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $Q_1, \ldots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$ paarweise disjunkte (rechts) halboffene Quader mit $Q_k \subseteq U$ sind.

Lemma A.4 *$\mathcal{F}(U)$ ist ein Ring auf U.*

---

[53] Wir orientieren uns hier eng an den entsprechenden Abschnitten aus Bauers "Maß- und Integrationstheorie." Jedoch wurde der unnötig komplizierte Beweis von Bauers Satz 4.4 durch einen einfacheren ersetzt und die unnötige Benutzung von Dynkinsystemen im Beweis von Bauers Satz 5.4 eliminiert.

[54] Wenn man Lemma A.9 hinnimmt, dessen Beweis Kapitel 3 benutzt.

[55] Zum Beweis des Eindeutigkeitssatzes benötigt man Definition 5.10 bis Folgerung 5.18, die rein logisch gesehen ebenfalls unmittelbar nach Kapitel 2 gelesen werden können.

Beweis. R1: Es ist $\emptyset = \bigcup_{j=1}^{0} Q_k \in \mathcal{R}$.

R2 und **R3:** Es seien $A, B \in \mathcal{F}(U)$, wobei o.B.d.A. $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ (sonst sind die Behauptungen trivial). Dann existieren $k, \ell \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte halboffene Quader $[a^i, b^i[$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und paarweise disjunkte halboffene Quader $[c^j, d^j[$ für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ derart, dass

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} [a^i, b^i[\quad \text{und} \quad B = \bigcup_{j=1}^{\ell} [c^j, d^j[\,,$$

wobei $a^i = (a^i_1, \ldots, a^i_n)$, $b^j = (b^j_1, \ldots, b^j_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen die vorigen Zerlegungen in Quader durch geeignete "Verfeinerungen" ersetzen, um sie kompatibel zu machen. Für festes $m \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir hierzu $H_m \subseteq \mathbb{R}$ als die Menge aller Zahlen a^i_m, b^i_m, c^j_m und d^j_m mit $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Dann ist etwa $H_m = \{r_{m,0}, r_{m,1}, \ldots, r_{m,\alpha_m}\}$ mit $\alpha_m \in \mathbb{N}$ und $r_{m,0} < r_{m,1} < \cdots < r_{m,\alpha_m}$. Wir definieren nun $\mathcal{Q}$ als die Menge der Quader

$$\prod_{m=1}^{n} [r_{m,j_m-1},\, r_{m,j_m}[$$

mit $j_m \in \{1, \ldots, \alpha_m\}$ für $m \in \{1, \ldots, n\}$ und beobachten, dass diese Quader paarweise disjunkt sind. Für jeden Quader $[a^i, b^i[$ gilt nun

$$[a^i, b^i[= \bigcup_{Q \in \mathcal{Q} \text{ mit } Q \subseteq [a^i, b^i[} Q\,,$$

denn wir haben den Quader $[a^i, b^i[$ ja lediglich in die kleineren Quader Q zerteilt, indem wir zu den Koordinatenebenen parallele Hyperebenen eingezogen haben.[56] Eine analoge Formel gilt auch für $[c^j, d^j[$. Setzen wir $I := \{Q \in \mathcal{Q} \colon Q \subseteq A\}$ und $J := \{Q \in \mathcal{Q} \colon Q \subseteq B\}$, so folgt

$$A = \bigcup_{Q \in I} Q \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{Q \in J} Q\,.$$

Da die Mengen $Q \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt sind, erhalten wir jetzt wie gewünscht

$$A \setminus B = \bigcup_{Q \in I \setminus J} Q \in \mathcal{F}(U) \quad \text{und} \quad A \cup B = \bigcup_{Q \in I \cup J} Q \in \mathcal{F}(U)\,.$$

□

Definition A.5 Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer Menge X. Eine Funktion $\mu \colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ wird ein *Prämaß* auf $\mathcal{R}$ genannt, wenn gilt:

P1 $\mu(\emptyset) = 0$;

P2 Für jede Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{R}$ mit Vereinigung $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ gilt $\mu\big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

[56] Im 2-Dimensionalen entspricht dies dem Aufteilen eines Schachbretts in seine Felder.

Eine Funktion $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ wird *Inhalt* auf $\mathcal{R}$ genannt, wenn gilt:

I1 $\mu(\emptyset) = 0$;

I2 $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Da wir $A_3 := A_4 := \cdots := \emptyset$ wählen können, ist jedes Prämaß insbesondere auch ein Inhalt.[57] Zur späteren Benutzung halten wir einige elementare Eigenschaften von Inhalten und Prämaßen fest:

Lemma A.6 *Für einen Inhalt $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ gilt:*

(a) *μ ist endlich additiv, d.h. sind $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt, so gilt $\mu\big(\bigcup_{j=1}^k A_j\big) = \sum_{j=1}^k \mu(A_j)$.*

(b) *Für alle $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

(c) *μ ist monoton, d.h. sind $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq B$, so folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(d) *μ ist subadditiv, d.h. für alle $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{R}$ gilt $\mu\big(\bigcup_{j=1}^k A_j\big) \leq \sum_{j=1}^k \mu(A_j)$.*

(e) *Für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;\leq\; \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big).$$

Beweis. (a) Folgt aus **I2** durch Induktion.

(b) Da $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ Vereinigungen disjunkter Mengen sind, folgt

$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad \text{und} \quad \mu(B) \;=\; \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)\,. \tag{119}$$

Addition der zwei Gleichungen liefert

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \;=\; \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \setminus A)\,.$$

Hieraus ergibt sich $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$, wenn $\mu(B \setminus A) < \infty$. Ist hingegen $\mu(B \setminus A) = \infty$, so gilt nach (119) auch $\mu(A \cup B) = \infty$ und $\mu(B) = \infty$, so dass ebenfalls die gewünschte Formel gilt.

(c) Falls $A \subseteq B$, liefert (119)

$$\mu(B) \;=\; \mu(A) + \mu(B \setminus A) \;\geq\; \mu(A).$$

[57] Die Umkehrung gilt nicht.

(d) Setzt man $B_j := A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$, so sind $B_1, \ldots, B_k$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $B_j \subseteq A_j$ und $\bigcup_{j=1}^k B_j = \bigcup_{j=1}^k A_j$. Somit

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \;=\; \mu\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right) \;=\; \sum_{j=1}^k \mu(B_j) \;\leq\; \sum_{j=1}^k \mu(A_j)\,;$$

hierbei wurde zunächst die endliche Additivität von μ benutzt, anschließend die Monotonie.

(e) Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{R}$ mit $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$, so gilt $\bigcup_{j=1}^k A_j \subseteq A$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit wegen endlicher Additivität und Monotonie

$$\sum_{j=1}^k \mu(A_j) \;=\; \mu\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \;\leq\; \mu(A)\,.$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert nun die Behauptung. □

Lemma A.7 *Es sei* $\mathcal{R}$ *ein Ring auf einer Menge* X *und* $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ *ein Prämaß. Für beliebige Mengen* $A_0, A_1, A_2, \ldots$ *aus* $\mathcal{R}$ *gilt dann*

$$A_0 \;\subseteq\; \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \quad\Rightarrow\quad \mu(A_0) \;\leq\; \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\,. \tag{120}$$

Beweis. Gilt $A_0 \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, so ist $A_0 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(A_0 \cap A_j)$ mit $A_0 \cap A_j \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_0 \cap A_j) \leq \mu(A_j)$, weil μ ja insbesondere ein Inhalt und somit nach Lemma A.6 (c) monoton ist. Wir dürfen daher o.B.d.A. $A_0 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ annehmen. Dann sind $B_j := A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_j \in \mathcal{R}$ für $j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen mit Vereinigung $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = A_0$ und $B_j \subseteq A_j$. Somit

$$\mu(A_0) \;=\; \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) \;\leq\; \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$$

wegen **P2** und der Monotonie von μ. □

Das folgende Lemma zeigt, dass es genau ein Prämaß μ auf dem Ring $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ der Figuren in $\mathbb{R}^n$ gibt, welches jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet (das Produkt der Seitenlängen). Man nennt μ das *Lebesguesche Prämaß.*

Lemma A.8 (Lebesguesches Prämaß). *Es sei* $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *der Ring der Figuren in* $\mathbb{R}^n$*. Dann gilt:*

(a) *Sind* $[a^1, b^1[, \ldots, [a^k, b^k[\;\subseteq \mathbb{R}^n$ *paarweise disjunkte halboffene Quader sowie auch* $[c^1, d^1[, \ldots, [c^\ell, d^\ell[$ *und ist* $A := \bigcup_{i=1}^k [a^i, b^i[= \bigcup_{j=1}^\ell [c^j, d^j[$*, so gilt*

$$\mu(A) \;:=\; \sum_{i=1}^k \prod_{m=1}^n (b_m^i - a_m^i) \;=\; \sum_{j=1}^\ell \prod_{m=1}^n (d_m^j - c_m^j)\,. \tag{121}$$

(b) *Die nach Teil* (a) *wohldefinierte Abbildung*

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty[$$

ist ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ *derart, dass* $\mu([a,b[) = \prod_{m=1}^{n}(b_m - a_m)$ *für jeden halboffenen Quader* $[a,b[\subseteq \mathbb{R}^n$*. Es ist* μ *das einzige Prämaß mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. Wir stellen dem Beweis eine Vorüberlegung voran. Es sei $[a,b[\subseteq \mathbb{R}^n$ ein halboffener Quader mit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Weiter seien für alle $m \in \{1, \ldots, n\}$ Zahlen $\alpha_m \in \mathbb{N}$ und $a_m = r_{m,0} < r_{m,1} < \cdots < r_{m,\alpha_m} = b_m$ gegeben. Dann gilt

$$b_m - a_m = \sum_{j=1}^{\alpha_m} (r_{m,j} - r_{m,j-1})$$

(Teleskopsumme!) für $m = 1, \ldots, n$ und somit durch Ausmultiplizieren (Distributivgesetz):

$$\begin{aligned}(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) &= \left(\sum_{j_1=1}^{\alpha_1} (r_{1,j_1} - r_{1,j_1-1})\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{j_n=1}^{\alpha_n} (r_{n,j_n} - r_{1,j_n-1})\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{\alpha_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{\alpha_n} \prod_{m=1}^{n} (r_{m,j_m} - r_{m,j_m-1}).\end{aligned}$$

Das natürliche Volumen (Produkt der Seitenlängen) von $[a,b[$ ist also gleich der Summe der Volumina der paarweise disjunkten Quader $\prod_{m=1}^{n}[r_{m,j_m-1}, r_{m,j_m}[$ mit Vereinigung $[a,b[$.

(a) In der beschriebenen Situation definieren wir α_m, reelle Zahlen $r_{m,j}$ und eine Menge $\mathcal{Q}$ von Quadern wir im Beweis von Lemma A.4. Nach der Vorüberlegung lässt sich das natürliche Volumen $\mathrm{Vol}_n([a^i, b^i[)$ von $[a^i, b^i[$ umschreiben als

$$\mathrm{Vol}_n([a^i, b^i[) = \sum_{Q \in \mathcal{Q} \text{ mit } Q \subseteq [a^i, b^i[} \mathrm{Vol}_n(Q).$$

Da die Mengen $Q \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt sind und A überdecken, erhalten wir für die linke Seite von (121):

$$\sum_{i=1}^{k} \prod_{m=1}^{n} (b_m^i - a_m^i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n([a^i, b^i[) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{Q \in \mathcal{Q} \text{ mit } Q \subseteq [a^i, b^i[} \mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mathrm{Vol}_n(Q).$$

Analog erhalten wir $\sum_{j=1}^{\ell} \prod_{m=1}^{n} (d_m^j - c_m^j) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mathrm{Vol}_n(Q)$ für die rechte Seite von (121), die beiden sind also gleich.

(b) Da jede Figur eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter halboffener Quader ist und Prämaße endlich additiv sind, kann es höchstens ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ geben, das jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet. Die Funktion μ aus (a) ordnet jedem halboffenen Quader das richtige Volumen zu. Wir zeigen nun, dass μ ein Prämaß ist.

P1 ist klar. Als eine Vorüberlegung für den Beweis von **P2** zeigen wir nun die endliche Additivität von μ (wobei man natürlich nur zwei Sumnmanden zu betrachten braucht). Seien also $A, B \in \mathcal{R}$ disjunkt. Dann gilt $A = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ für gewisse paarweise disjunkte halboffene Quader $Q_j \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B = Q_{k+1} \cup \cdots \cup Q_\ell$ für ebensolche Q_j, per Definition einer Figur. Da $A \cap B = \emptyset$, gilt sogar $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ mit $i \neq j$. Da $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\ell} Q_j$, gilt per Definition von $\mu(A \cup B)$ wie gewünscht

$$\mu(A \cup B) \;=\; \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j(Q_j) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) + \sum_{j=k+1}^{\ell} \mu(Q_j) \;=\; \mu(A) + \mu(B)\,.$$

P2: Sei nun $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{F}$ mit Vereinigung $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$. Wir haben zu zeigen, dass

$$\mu(A) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,.$$

Da A eine Figur ist, gilt $A = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k$ für gewisse paarweise disjunkte, halboffene Quader $Q_k \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $Q_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i \cap A_j \in \mathcal{F}$ und

$$\mu(A) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \mu(Q_k) \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} \mu(Q_i \cap A_j) \;=\; \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_i \cap A_j)\,.$$

Es genügt daher, die Behauptung für $Q_1, \ldots, Q_k$ statt A zu beweisen, und wir dürfen somit o.B.d.A. annehmen, dass $A = [a, b[$ ein halboffener Quader ist, mit $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Nach Lemma A.6 (e) gilt zunächst

$$\mu(A) \;\geq\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,.$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählen wir $r > 0$ derart, dass $a_i < b_i - r$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ist $\varepsilon \in \,]0, r]$ gegeben, so ist

$$B \;:=\; B_\varepsilon \;:=\; [a, b - \varepsilon e[\qquad \text{mit } \; e := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

ein halboffener Quader, dessen kompakter Abschluss $\overline{B} = [a, b - \varepsilon e]$ ganz in A enthalten ist. Wir definieren nun eine Figur $Q_j^\varepsilon \in \mathcal{F}$ mit

$$Q_j \subseteq (Q_j^\varepsilon)^\circ \;\; \text{(Inneres)} \qquad \text{und} \quad \mu(Q_j^\varepsilon) \;\leq\; \mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\,,$$

wie folgt: Wir schreiben $Q_j = \bigcup_{i=1}^{k} [c^i, d^i[$ als disjunkte Vereinigung halboffener Quader und setzen

$$Q_j^\varepsilon \;:=\; \bigcup_{i=1}^{k} [c^i - \delta e, d^i + \delta e[\,,$$

wobei $\delta > 0$ so klein gewählt ist, dass

$$\mu(Q_j^\varepsilon) \;=\; \sum_{i=1}^{k}\prod_{m=1}^{n}(d_m^i - c_m^i + 2\delta) \;<\; \sum_{i=1}^{k}\prod_{m=1}^{n}(d_m^i - c_m^i) \;+\; 2^{-j}\varepsilon \;=\; \mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\,.$$

Dann gilt $\overline{B} \subseteq A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(Q_j^\varepsilon)^\circ$. Da $\overline{B}$ kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\overline{B} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(Q_j^\varepsilon)^\circ$. Folglich gilt $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} Q_j^\varepsilon$ und somit

$$\begin{aligned}\mu(B_\varepsilon) \;=\; \mu(B) \;&\leq\; \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{N} Q_j^\varepsilon\Big) \;\leq\; \sum_{j=1}^{N}\mu(Q_j^\varepsilon) \;\leq\; \sum_{j=1}^{N}\big(\mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\big)\\ &\leq\; \sum_{j=1}^{\infty}\big(\mu(Q_j) + 2^{-j}\varepsilon\big) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\mu(Q_j) \;\;+\;\varepsilon\,.\end{aligned} \tag{122}$$

Da $\mu(B_\varepsilon) = \prod_{m=1}^{n}(b_m - \varepsilon - a_m) \to \prod_{m=1}^{n}(b_m - a_m) = \mu(A)$ für $\varepsilon \to 0$, folgt aus (122) durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ wie gewünscht $\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\mu(Q_j)$. □

Als technisches Hilfsmittel brauchen wir noch eine kleine Ergänzung zum Doppelreihensatz (Folgerung 3.27):

Lemma A.9 *Ist $a_{j,k} \in [0,\infty]$ für $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ und $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ eine Bijektion, so gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} a_{\kappa(i)}\,. \tag{123}$$

Beweis. Es sei $\zeta\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{N}^2$ und $a\colon \mathbb{N}^2 \to [0,\infty]$, $(j,k) \mapsto a_{j,k}$. Wie im Beweis des Doppelreihensatzes sehen wir, dass

$$\int_{\{j\}\times\mathbb{N}} a\; d\zeta \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\,,$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Da $\{1,\ldots,n\} \times \mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{n}(\{j\}\times\mathbb{N})$ eine disjunkte Vereinigung ist, folgt

$$\int_{\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{N}} a\; d\zeta \;=\; \sum_{j=1}^{n}\int_{\{j\}\times\mathbb{N}} a\; d\zeta \;=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$$

mit Satz 3.15 (a). Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{N}) = \mathbb{N}^2$, wobei die beteiligten Mengen aufsteigen, erhalten wir weiter mit Satz 3.15 (a) und Lemma 2.4 (c)

$$\int_{\mathbb{N}^2} a\; d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{\{1,\ldots,n\}\times\mathbb{N}} a\; d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\,.$$

Die Mengen $X_n := \kappa(\{1,\ldots,n\})$ steigen ebenfalls gegen $\mathbb{N}^2$ auf, und somit gilt auch

$$\int_{\mathbb{N}^2} a\; d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{X_n} a\; d\zeta \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_{\kappa(i)} \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} a_{\kappa(i)}\,.$$ □

Satz A.10 (Hahnscher Fortsetzungssatz). *Es sei* $\mathcal{R}$ *ein Ring auf einer Menge* X *und* $\mu\colon \mathcal{R} \to [0,\infty[$ *ein Prämaß auf* $\mathcal{R}$*. Dann gilt:*

(a) μ *lässt sich zu einem Maß* $\bar\mu$ *auf* $(X, \sigma(\mathcal{R}))$ *fortsetzen, d.h. es gilt* $\bar\mu|_{\mathcal{R}} = \mu$*.*

(b) *Gilt* $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ *für eine Folge von Mengen* $X_j \in \mathcal{R}$ *mit* $\mu(X_j) < \infty$*, so ist die Fortsetzung* $\bar\mu$ *eindeutig festgelegt. Sie ist gegeben durch die Formel*

$$\bar\mu(A) \;=\; \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\colon A_j \in \mathcal{R} \text{ mit } A \subseteq \textstyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right\} \quad \text{für alle } A \in \sigma(\mathcal{R}). \tag{124}$$

Beweis. (a) Für jede Menge $Q \subseteq X$ bezeichne $\mathcal{U}(Q)$ die Menge aller Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Mengen $A_j \in \mathcal{R}$, die Q überdecken, also

$$Q \;\subseteq\; \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\,.$$

Wir definieren nun

$$\mu^*(Q) \;:=\; \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\colon (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q)\right\} \tag{125}$$

für jede Teilmenge $Q \subseteq X$ und erhalten damit eine Funktion $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ auf der Potenzmenge von X. Können wir Q nicht durch abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{R}$ überdecken, (wenn also $\mathcal{U}(Q) = \emptyset$), so ist übrigens $\mu^*(Q) = \infty$. Dies liegt daran, das wir das Infimum in der geordneten Menge $[0,\infty]$ bilden, und

$$\inf \emptyset \;=\; \infty$$

dort (für alle $x \in \emptyset$ gilt ja $\infty \le x$, und somit ist ∞ eine untere Schranke für $\emptyset$ in $[0,\infty]$).

Die Funktion μ^* besitzt folgende Eigenschaften und wird daher ein sogenanntes "äußeres Maß" (engl. "outer measure") genannt:[58]

OM1 $\mu^*(\emptyset) = 0$;

OM2 μ^* ist *monoton*, d.h. für alle $Q_1, Q_2 \subseteq X$ mit $Q_1 \subseteq Q_2$ gilt $\mu^*(Q_1) \le \mu^*(Q_2)$;

OM3 Für jede Folge $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $Q_j \subseteq X$ gilt $\mu^*\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(Q_j)$.

Hierbei folgt **OM1** aus der Bemerkung, dass die konstante Folge $\emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathcal{U}(\emptyset)$ liegt. Gilt $Q_1 \subseteq Q_2$, so ist jede Überdeckung von Q_2 auch eine von Q_1 und somit $\mathcal{U}(Q_2) \subseteq \mathcal{U}(Q_1)$, woraus **OM2** folgt. Für den Beweis von **OM3** darf o.B.d.A. angenommen werden, dass

$$\mu^*(Q_j) \;<\; \infty \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}, \tag{126}$$

[58] Warnung: Ein "äußeres" Maß ist im Allgemeinen kein Maß! Die Bezeichnung ist irreführend!

denn andernfalls ist $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q_j) = \infty$ und somit ist die geforderte Ungleichung automatisch erfüllt. Gelte also (126). Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $j \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Folge $(A_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q_j)$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{j,k}) \;\leq\; \mu^*(Q_j) \,+\, 2^{-j}\,\varepsilon\,. \tag{127}$$

Um die Doppelfolge $(A_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ als ein Element von $\mathcal{U}(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j)$ auffassen zu können, wählen wir eine Bijektion $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ und betrachten stattdessen die Folge $(A_{\kappa(i)})_{i\in\mathbb{N}}$. Da $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \subseteq \bigcup_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} A_{j,k} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_{\kappa(i)}$, ist $(A_{\kappa(i)})_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j)$ und somit

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\Big) \;\leq\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{\kappa(i)}) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{j,k}) \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q_j) \;+\; \varepsilon\,,$$

wobei das Gleicheitszeichen auf Lemma A.9 beruht, die letzte Abschätzung auf (127) und der Summenformel für die geometrische Reihe. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu^*\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q_j)$.

Entscheidend für das Weitere ist nun die Bemerkung, dass für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\mu^*(A) \;=\; \mu(A) \tag{128}$$

sowie

$$\mu^*(Q) \;\geq\; \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \qquad \text{für alle } \; Q \in \mathcal{P}(X), \tag{129}$$

wobei $A^c := X \setminus A$. Für den Beweis von (129) kann hierbei $\mu^*(Q) < \infty$ angenommen werden (sonst ist die Aussage trivial), weswegen insbesondere $\mathcal{U}(Q) \neq \emptyset$. Zunächst gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A) \;+\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A)$$

für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q)$ wegen der endlichen Additivität von μ. Da $(A_j \cap A)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)$ und $(A_j \cap A^c)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A^c)$, folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;\geq\; \mu^*(Q \cap A) \;+\; \mu^*(Q \setminus A)$$

für jede Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(Q)$. Übergang zum Infimum liefert nun (129).

Zum Beweis von (128) beachten wir zunächst, dass $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, da die Folge $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ in $\mathcal{U}(A)$ liegt. Ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A)$, so ist $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ und somit $\mu(A) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$ nach Lemma A.7, woraus $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ folgt. Also besteht Gleichheit.

A.11 Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird μ^*-*messbar* genannt, wenn (129) gilt. Wir schreiben Σ_{μ^*} für die Menge aller μ^*-messbaren Teilmengen von X.

Nach dem Vorigen gilt also $\mathcal{R} \subseteq \Sigma_{\mu^*}$. Der folgenden Satz zeigt, dass auch

$$\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \Sigma_{\mu^*}$$

gilt und

$$\bar{\mu} := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})} \tag{130}$$

ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ definiert, welches nach (128) wie gewünscht das Prämaß μ fortsetzt.

(b) Nach dem Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße (Folgerung 5.18) gibt es in der Situation von (b) höchstens eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$. Also ist das durch (130) definierte Maß $\bar{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ. Wegen (125) und (130) gilt (124). □

Satz A.12 *Ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf einer Menge X, so ist die Menge Σ_{μ^*} aller im Sinne von* **A.11** *μ^*-messbaren Mengen eine σ-Algebra auf X. Die Einschränkung*

$$\mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}} : \Sigma_{\mu^*} \to [0, \infty]$$

ist ein Maß.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass (129) und damit die Bedingung $A \in \Sigma_{\mu^*}$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ äquivalent ist zu

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \qquad \text{für alle } Q \in \mathcal{P}(X). \tag{131}$$

Aus **OM3**, angewandt auf die Folge $Q \cap A$, $Q \setminus A$, $\emptyset, \emptyset, \ldots$ folgt nämlich die Gültigkeit der zu (129) umgekehrten Ungleichung für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$.

Wir prüfen nun die Axiome einer σ-Algebra für Σ_{μ^*} nach.

S1: Aus (129) oder (131) folgt sofort, dass $\emptyset \in \Sigma_{\mu^*}$.

S2: Da (131) in A und A^c symmetrisch ist, enthält Σ_{μ^*} mit A auch das Komplement A^c.

S3: Wir zeigen zunächst, dass Σ_{μ^*} unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist, also $A \cup B \in \Sigma_{\mu^*}$ für alle $A, B \in \Sigma_{\mu^*}$. Da $B \in \Sigma_{\mu^*}$, gilt nach (131)

$$\begin{aligned} \mu^*(Q \cap A) &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*((Q \cap A) \setminus B) \quad \text{und} \\ \mu^*(Q \cap A^c) &= \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*((Q \cap A^c) \setminus B)\,. \end{aligned}$$

Setzt man diese Formeln in (131) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \\ &= \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap \underbrace{A^c \cap B^c}_{=(A \cup B)^c}). \end{aligned} \tag{132}$$

Ersetzt man hier Q durch $Q \cap (A \cup B)$, so gewinnt man

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) \;=\; \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B)\,. \tag{133}$$

Die Summe der ersten drei Summanden in (132) ist also $\mu^*(Q \cap (A \cup B))$, und somit lässt sich (132) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) \;&=\; \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \cap (A \cup B)^c) \\ &=\; \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(Q \setminus (A \cup B))\,. \end{aligned}$$

Da $Q \in \mathcal{P}(X)$ beliebig war, ist also $A \cup B \in \Sigma_{\mu^*}$.

Nun sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_j \in \Sigma_{\mu^*}$. Wegen **S2** und der Abgeschlossenheit von Σ_{μ^*} unter endlichen Vereinigungen ist dann

$$B_j \;:=\; A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \;=\; A_j \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\Big)^c \;=\; \Big(A_j^c \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\Big)^c \;\in\; \Sigma_{\mu^*}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, wobei $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Um $A \in \Sigma_{\mu^*}$ einzusehen, darf man also o.B.d.A. annehmen, dass die Mengen A_j paarweise disjunkt sind.

Nach (133), angewandt mit A_1 und A_2 anstelle von A und B, gilt

$$\mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) \;=\; \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2)\,.$$

Hieraus folgt durch vollständige Induktion

$$\mu^*\Big(Q \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_j)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$ und $n \in \mathbb{N}$. Da $C_n := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \Sigma_{\mu^*}$ nach dem Vorigen und $Q \setminus C_n \supseteq Q \setminus A$, also $\mu^*(Q \setminus B_n) \geq \mu^*(Q \setminus A)$ gilt, erhält man

$$\mu^*(Q) \;=\; \mu^*(Q \cap C_n) + \mu^*(Q \setminus C_n) \;\geq\; \sum_{j=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_j) \;+\; \mu^*(Q \setminus A)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt mit **OM3**

$$\mu^*(Q) \;\geq\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_j) \;+\; \mu^*(Q \setminus A) \;\geq\; \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

und damit nach der einleitenden Bemerkung zu Beweisbeginn sogar

$$\mu^*(Q) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_j) \;+\; \mu^*(Q \setminus A) \;=\; \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \tag{134}$$

für alle $Q \in \mathcal{P}(X)$. Also gilt $A \in \Sigma_{\mu^*}$, und somit ist Σ_{μ^*} eine σ-Algebra.

Wählt man in (134) $Q := A$, so erhalten wir $\mu^*(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$, d.h. $\mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}}$ ist σ-additiv und somit ein Maß. □

Die Beweisidee, einem Prämaß durch (125) zunächst ein äußeres Maß zuzuordnen und daraus ein Maß auf den μ^*-messbaren Mengen zu gewinnen, geht auf C. Carathéodory (1873–1950) zurück.

Beweis von Satz 2.5: (a) Es sei $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ das Lebesguesche Prämaß auf dem Ring $\mathcal{F}$ der Figuren in $\mathbb{R}^n$, wie in Lemma A.8. Nach dem Hahnschen Fortsetzungsatz existiert dann ein Maß $\lambda := \bar{\mu}$ auf $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, welches μ fortsetzt. Für jeden halboffenen Quader $[a, b[\subseteq \mathbb{R}^n$ gilt dann $\lambda([a, b[) = \mu([a, b[) = \prod_{m=1}^{n}(b_m - a_m)$, wie gewünscht. Nach dem Eindeutigkeitssatz für σ-endliche Maße (Folgerung 5.18) ist λ durch vorige Eigenschaft eindeutig festgelegt, da sich $\mathbb{R}^n$ durch eine Folge halboffener Quader ausschöpfen lässt.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\nu : \mathcal{B}(U) \to [0, \infty]$ ein Maß, welches auf allen kompakten Teilmengen von $\mathcal{B}(U)$ endliche Werte annimmt, und $\mathcal{F}(U)$ der Ring der Figuren in U. Dann ist $\mu := \nu|_{\mathcal{F}(U)}$ ein Prämaß auf $\mathcal{F}(U)$. Der Hahnsche Fortsetzungssatz liefert ein Maß $\bar{\mu} : \mathcal{B}(U) = \sigma(\mathcal{F}(U)) \to [0, \infty]$, welches μ fortsetzt und (124) erfüllt, also die in Satz 2.5 (b) beschriebene Bedingung. Da sich U durch eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halboffener Quader Q_k mit kompaktem Abschluss $\overline{Q_k} \subseteq U$ ausschöpfen lässt und dann $\mu(Q_k) = \nu(Q_k) \leq \nu(\overline{Q_k}) < \infty$ per Voraussetzung, gilt $\nu = \bar{\mu}$ aufgrund der Eindeutigkeitsaussage im Hahnschen Fortsetzungssatz. Also erfüllt auch ν die in Satz 2.5 (b) beschriebene Bedingung. □

B Ergänzungen zu Kapitel 13

Im Folgenden sind einige Ergänzungen zu Kapitel 13 zusammengestellt. Insbesondere wird gezeigt, dass jede 1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten geschlossenen C^1-Kurven ist.

Wegkomponenten einer Untermannigfaltigkeit

Wir erinnern an die Definition der Wegkomponenten eines metrischen Raumes:

Definition B.1 Es sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Gegeben $x, y \in M$ schreiben wir $x \sim y$, wenn es eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to M$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ (einen "Weg von x nach y in M"). Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation[59] auf M. Wir schreiben $M_x := [x]_\sim$ für die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in M$ und nennen M_x die *Wegkomponente von x*.

(b) Besitzt M nur eine Wegkomponente, so wird M *wegzusammenhängend* genannt.

Bemerkung B.2 (a) M_x besteht also aus allen Punkten $y \in M$, die wir durch einen Weg mit x verbinden können.

(b) Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, bilden die Wegkomponenten eine Partition von M (eine Zerlegung in paarweise disjunkte, nicht-leere Mengen mit Vereinigung M).

(c) Jede Wegkomponente von M ist wegzusammenhängend.

(d) Ist $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $x \in M$, so gilt $f(M_x) \subseteq N_{f(x)}$ (ist nämlich $\gamma\colon [0,1] \to M$ ein Weg in M von x nach $y \in M_x$, so ist $f \circ \gamma$ ein Weg in N von $f(x)$ nach $f(y)$).

(e) Als Konsequenz des Zwischenwertsatzes ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ genau dann wegzusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

(f) Ein metrischer Raum M heißt *zusammenhängend*, wenn es keine nicht-leeren, disjunkten offenen Teilmengen $U, V \subseteq M$ gibt mit $M = U \cup V$. Aus der Analysis II wissen wir, dass jeder wegzusammenhängende metrische Raum auch zusammenhängend ist.

---

[59] *Reflexivität*: Gegeben $x \in M$ gilt $x \sim x$, da wir x mit sich selbst durch einen konstanten Weg verbinden können. *Symmetrie*: Gilt $x \sim y$, so gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \to M$ von x nach y. Dann ist $[0,1] \to M$, $t \mapsto \gamma(1-t)$ ein Weg von y nach x, somit $y \sim x$. *Transitivität*: Gilt $x \sim y$ und $y \sim z$, so gibt es Wege γ und η von x nach y bzw. von y nach z. Definieren wir $\zeta(t) := \gamma(2t)$ für $t \in [0, 1/2]$, $\zeta(t) := \eta(2t-1)$ für $t \in [1/2, 1]$, so ist ζ überall rechts- und linksseitig stetig und somit stetig, mithin ein Weg von x nach z. Also $x \sim z$.

Satz B.3 (Wegkomponenten einer Untermannigfaltigkeit). *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(a) *Jede Wegkomponente von M ist offen und abgeschlossen in M, und sie ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so besitzt M nur endlich viele verschiedene Wegkomponenten $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Dann ist also*

$$M = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m ,$$

wobei $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ paarweise disjunkte, offene und abgeschlossene Teilmengen von M sind sowie wegzusammenhängende, kompakte, k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (a) Gegeben $x \in M$ und $y \in M_x$ gibt es nach dem Parametrisierungssatz eine Karte $\phi : U \to M$ von M mit $y \in \phi(U)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $W := B_\varepsilon(\phi^{-1}(y)) \subseteq U$. Da die Kugel W wegzusammenhängend ist, gilt dies (nach Bemerkung B.2 (d)) auch für die offene Umgebung $\phi(W)$ von y. Also gilt $\phi(W) \subseteq M_x$ und somit ist M_x eine Umgebung von y in M. Da y beliebig war, ist M_x offen in M. Als offene Teilmenge von M ist auch M_x eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Da die Wegkomponenten eine Partition bilden, ist $M \setminus M_x$ die Vereinigung der anderen Wegkomponenten und somit offen in M. Also ist M_x abgeschlossen in M.

(b) Die Menge $\pi_0(M)$ aller Wegkomponenten von M ist nach (a) eine offene Überdeckung von M. Ist M kompakt, so gibt es eine endliche Teilüberdeckung, wir finden also endlich viele paarweise verschiedene Mengen $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \in \pi_0(M)$ mit Vereinigung $\bigcup_{j=1}^m \Gamma_j = M$. Da $\pi_0(M)$ eine Partition ist, sind die Mengen Γ_j paarweise disjunkt und es folgt $\pi_0(M) = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge M ist jede der Komponenten Γ_j kompakt. Alles Weitere wurde bereits in (a) gezeigt. □

Parametrisierung von Kurven durch Bogenlänge

Definition B.4 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg, so definiert man die von t_0 aus gemessene Bogenlänge von γ als die Funktion

$$L_{\gamma,t_0} \colon I \to \mathbb{R}, \qquad L_{\gamma,t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\|_2 \, ds .$$

Definition B.5 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ein C^1-Weg $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt *auf Bogenlänge parametrisiert*, wenn eine (und somit jede) der im folgenden Lemma formulierten Bedingungen erfüllt ist.

Lemma B.6 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall und $\gamma \colon I \to \mathbb{R}$ ein C^1-Weg. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(a) $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ *für alle* $t \in I$.

(b) $L_{\gamma,t_0}(t) = t - t_0$ *für alle* $t_0 \in I$ *und alle* $t \in I$.

(c) *Es existiert ein* $t_0 \in I$ *derart, dass* $L_{\gamma,t_0}(t) = t - t_0$ *für alle* $t \in I$.

Beweis. (a)⇒(b): Gilt $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ für alle t, so folgt für alle $t_0, t \in I$

$$L_{\gamma,t_0}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\|_2 \, ds \;=\; \int_{t_0}^{t} 1 \, ds \;=\; t - t_0 \,.$$

(b)⇒(c) ist trivial.

(a)⇒(a): Gilt $L_{\gamma,t_0}(t) = t - t_0$, so folgt

$$1 \;=\; \frac{d}{dt} L_{\gamma,t_0}(t) \;=\; \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\|_2 \, ds \;=\; \|\gamma'(t)\|_2$$

mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Insbesondere ist jeder auf Bogenlänge parametrisierte Weg wegen Lemma B.6 (a) ein regulärer Weg.

Lemma B.7 *Ist* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ *ein regulärer* C^1*-Weg und* $t_0 \in I$, *so gilt:*

(a) $J := L_{\gamma,t_0}(I) \subseteq \mathbb{R}$ *ist ein offenes Intervall;*

(b) $L_\gamma(t)\colon I \to J$ *ist streng monoton wachsend und ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $L_{\gamma,t_0} : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit Ableitung

$$(L_{\gamma,t_0})'(t) = \|\gamma'(t)\|_2 \;>\; 0 \,.$$

Die Behauptungen folgen. □

Lemma B.8 *Ist* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ *ein regulärer* C^1*-Weg,* $t_0 \in I$ *und* $J := L_{\gamma,t_0}(I)$, *so ist* $\eta := \gamma \circ (L_{\gamma,t_0})^{-1}\colon J \to \mathbb{R}^n$ *ein auf Bogenlänge parametrisierter* C^1*-Weg.*

Beweis. Schreiben wir $\tau := L_{\gamma,t_0}^{-1}$, so ist $\eta = \gamma \circ \tau$ und somit

$$\eta'(s) \;=\; \tau'(s)\,\gamma'(\tau(s)) \;=\; \frac{1}{(L_{\gamma,t_0})'(\tau(s))}\,\gamma'(\tau(s)) \;=\; \frac{1}{\|\gamma'(\tau(s))\|_2}\,\gamma'(\tau(s))$$

nach der Kettenregel. Also ist $\|\eta'(s)\|_2 = \frac{\|\gamma'(\tau(s))\|_2}{\|\gamma'(\tau(s))\|_2} = 1$ und somit ist η nach Lemma B.6 (a) auf Bogenlänge parametrisiert. □

Lemma B.9 *Es seien $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ und $\eta: J \to \mathbb{R}^n$ auf Bogenlänge parametrisierte C^1-Wege, welche Einbettungen sind. Gilt $\gamma(I) = \eta(J)$, so ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) *Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $J = I + a$ und $\gamma(t) = \eta(t + a)$ für alle $t \in I$. Oder:*

(b) *Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass $J = a - I$ und $\gamma(t) = \eta(a - t)$ für alle $t \in I$.*

Beweis. Da γ eine Immersion und eine Einbettung ist, ist $M := \gamma(I)$ nach dem Parametrisierungssatz (Satz 9.21) eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, mit globaler Karte $\gamma: I \to M$. Das gleiche Argument zeigt, dass auch $\eta: J \to M$ eine globale Karte ist. Nach Satz 9.26 ist die Abbildung

$$\tau := \eta^{-1} \circ \gamma : I \to J$$

stetig differenzierbar. Es ist $\eta \circ \tau = \gamma$, somit

$$\tau'(t)\, \eta'(\tau(t)) = \gamma'(t)$$

nach der Kettenregel und somit

$$|\tau'(t)| = |\tau'(t)|\, \|\eta'(\tau(t))\|_2 = \|\tau'(t)\, \eta'(\tau(t))\|_2 = \|\gamma'(t)\|_2 = 1\,,$$

woraus $|\tau'(t)| = 1$ folgt. Also $\tau'(t) \in \{1, -1\}$ für alle $t \in I$. Da I ein Intervall ist, schließen wir mit dem Zwischenwertsatz, dass $\tau(t)$ nicht das Vorzeichen wechseln kann, also $\tau'(I) = \{1\}$ oder $\tau'(I) = \{-1\}$ gilt. Wählen wir $t_0 \in I$, so folgt im ersten Falle

$$\tau(t) = \tau(t_0) - t_0 + t \qquad \text{für alle } t \in I,$$

im zweiten Falle $\tau(t) = \tau(t_0) + t_0 - t$. Die Behauptung gilt also mit $a := \tau(t_0) - t_0$ bzw. $a := \tau(t_0) + t_0$. □

1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Wir zeigen nun, dass jede wegzusammenhängende, kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ eine geschlossene C^1-Kurve ist. Der Beweis beruht auf einem Lemma, das es ermöglicht, nach und nach einzelne Karten für M passend zusammenzusetzen, bis man einen periodischen Weg mit Bild M erhalten hat.

Vorüberlegung. Zur Motivation der folgenden Beweisstrategie schauen wir uns zunächst einmal eine prototypische kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit an, den Kreis $\mathbb{S}_1$ in $\mathbb{R}^2$. In diesem Falle ist $\theta: \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$, $\theta(t) := (\cos t, \sin t)$ ein 2π-periodischer regulärer C^1-Weg mit Bild $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_1$, der auf $[0, 2\pi[$ injektiv ist, und somit ist $\mathbb{S}_1$ eine geschlossene C^1-Kurve im Sinne von Definition 13.6. Sind $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle mit Längen $< 2\pi$, so sind $\gamma := \theta|_I$ und $\eta := \theta|_J$ Karten für $\mathbb{S}_1$. Die Bilder $\gamma(I)$ und $\eta(J)$ sind Kreisbögen; wenn sie überlappen, so können sie entweder vollständig ineinander enthalten sein, oder sie überlappen in einem Kreisbogen, oder aber ihr Durchschnitt besteht aus zwei Kreisbögen. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn $I =]0, 2\pi[$ und $J =]-\pi, \pi[$. In diesem Fall ist $\gamma(I) \cup \eta(J) = \mathbb{S}_1$ kompakt, und wir können aus γ und η durch eine stückweise Definition und periodische Fortsetzung die Funktion θ zurückgewinnen.

Lemma B.10 (Zusammenbauen von Wegen). *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine 1-dimensionale wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeit, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte offene Intervalle und $\gamma\colon I \to M$ sowie $\eta\colon J \to M$ auf Bogenlänge parametrisierte injektive C^1-Wege derart, dass $\gamma(I) \cap \eta(J) \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) *Ist $\gamma(I) \cup \eta(J)$ kompakt, so ist $\gamma(I) \cup \eta(J) = M$ und M ist eine geschlossene C^1-Kurve im Sinne von Definition* 13.6.

(b) *Andernfalls existiert ein beschränktes offenes Intervall $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $I \subseteq E$ und ein auf Bogenlänge parametrisierter, injektiver C^1-Weg $\zeta\colon E \to M$ derart, dass $\zeta(E) = \gamma(I) \cup \eta(J)$ und $\zeta|_I = \gamma$.*

Beweis. Sei etwa $I =]a, b[$ und $J =]c, d[$. Da M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, sind die injektiven Immersionen γ und η nach Lemma 9.28 Karten für M und somit insbesondere Einbettungen.

1. Fall: Ist $\eta(J) \subseteq \gamma(I)$, so ist $\eta(J) \cup \gamma(I) = \gamma(I)$ nicht kompakt (denn sonst wäre das zu $\gamma(I)$ homöomorphe offene Intervall I kompakt, was nicht der Fall ist). Wir sind also in der Situation von (b) und setzen einfach $E := I$ und $\zeta := \gamma$.

2. Fall: Ist $\gamma(I) \subseteq \eta(J)$, so ist $\gamma(I) \cup \eta(J) = \eta(J)$ nicht kompakt. Die Menge $U := \eta^{-1}(\gamma(I)) \subseteq \mathbb{R}$ ist offen und wegzusammenhängend, somit ein offenes Intervall. Da γ und $\eta|_U$ Einbettungen und auf Bogenlänge parametrisierte Wege mit gleichem Bild sind, gibt es nach Lemma B.9 ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass entweder $U = I + a$ und $\gamma(t) = \eta(t + a)$ für alle $t \in I$, oder $U = a - I$ und $\gamma(t) = \eta(a - t)$ für alle $t \in I$. In der ersten Situation setzen wir $E := J - a$ und definieren $\zeta\colon E \to M$ via $\zeta(t) := \eta(t + a)$; andernfalls setzen wir $E := a - J$ und definieren $\zeta\colon E \to M$ via $\zeta(t) := \eta(a - t)$. Dann leistet ζ das in (b) Verlangte.

3.Fall: Wir nehmen nun an, dass weder $\gamma(I) \subseteq \eta(J)$ noch $\eta(J) \subseteq \gamma(I)$. Dann ist $W := \gamma^{-1}(\eta(J))$ eine nicht-leere echte offene Teilmenge von I. Behauptung: $I \setminus W$ ist ein Intervall. Dazu seien $x, y \in I$ mit $x \leq y$; wir haben zu zeigen, dass $[x, y] \subseteq I \setminus W$. Widerspruchsbeweis: Andernfalls gibt es ein $z \in]x, y[\cap W =: V$. Da V offen in $\mathbb{R}$ ist, ist nach Satz B.3 (a) die Wegkomponente V_z eine offene wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ und daher ein offenes Intervall, somit $V_z =]\alpha, \beta[$ mit $x \leq \alpha < z < \beta \leq y$. Nach Satz 9.26 ist $\tau : W \to \eta^{-1}(\gamma(I))$, $\tau(t) := \eta^{-1}(\gamma(t))$ ein Diffeomorphismus auf die offene Teilmenge $\eta^{-1}(\gamma(I))$ von J. Als wegzusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist dann $\tau(V_z)$ ein Intervall, etwa $\tau(V_z) =]\alpha', \beta'[$ mit $c \leq \alpha' < \beta' \leq d$. Als Diffeomorphismus zwischen offenen Intervallen ist $\tau|_{V_z}$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Wir nehmen an, dass $\tau|_{V_z}$ streng monoton wachsend ist (den anderen Fall behandelt man analog). Wir behaupten, dass $\alpha' = c$. Andernfalls wäre nämlich $\alpha' \in J$ und $\lim_{t\to 0_+} \tau(\alpha+t) = \alpha'$. Da η stetig ist, wäre dann

$$\gamma(\alpha) \;=\; \lim_{t\to 0_+} \gamma(\alpha+t) \;=\; \lim_{t\to 0_+} \eta(\tau(\alpha+t)) \;=\; \eta(\alpha') \tag{135}$$

und somit $\alpha \in \gamma^{-1}(\eta(J)) = W$, folglich $\alpha \neq x$ und daher $[\alpha,\beta[\; \subseteq \;]x,y[\; \cap W = V$, was auf den Widerspruch $[\alpha,\beta[\; \subseteq V_z$ führt. Also ist $\alpha' = c$. Analog sieht man, dass $\beta' = d$. Somit ist $\tau(V_z) = J$ und daher $\eta(J) \subseteq \gamma(I)$, im Widerspruch zu den im vorliegenden 3. Fall gemachten Voraussetzungen. Also ist doch $I \setminus W$ ein Intervall. Da W offen ist, gibt es drei Möglichkeiten:

Fall 3 (i): Es ist $W = \;]r,b[$ für ein $r \in \;]a,b[$. Dann ist $\tau|_W$ entweder von der in Lemma B.9 (a) beschriebenen Gestalt, oder wie in (b). Wir nehmen Ersteres an (den zweiten Fall behandelt man analog). Dann gibt es also ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\tau(W) = \delta + W \subseteq J$ und $\tau(t) = \delta + t$, also $\gamma(t) = \eta(\tau(t)) = \eta(\delta+t)$ für alle $t \in W$. Wiederholung des bei (135) benutzten Arguments zeigt, dass $r + \delta = c$ sein muss. Wir setzen nun $E := \;]a, r+d-c[$ und definieren

$$\zeta\colon E \to M\,, \qquad \zeta(t) \;:=\; \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } t \in \;]a,b[; \\ \eta(\delta+t) & \text{falls } t \in \;]r, r+d-c[. \end{cases}$$

Nach dem Vorigen ist ζ wohldefiniert, und per Konstruktion hat ζ die in (b) geforderten Eigenschaften.

Fall 3 (ii): Es ist $W = \;]a,r[$ für ein $r \in \;]a,b[$. Dieser Fall kann analog zu Fall 3 (i) behandelt werden.

Fall 3 (iii): Es ist $W = \;]a,r[\; \cup \;]s,b[$ mit $a < r \leq s < b$. Nachdem wir notfalls η durch einen entsprechenden in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg ersetzen, dürfen wir annehmen, dass $\tau|_{]s,b[}$ monoton wachsend ist. Eine Wiederholung des bei (135) benutzten Arguments zeigt, dass dann $\tau(]s,b[) = \;]c, c+b-s[$ sein muss und

$$\tau(t) \;=\; c - s + t \qquad \text{für alle } t \in]s,b[. \tag{136}$$

Analog muss dann $\tau(]a,r[) = \;]d-(r-a), d[$ sein und

$$\tau(t) \;=\; d - r + t \qquad \text{für alle } t \in \;]a,r[. \tag{137}$$

Wir setzen $\ell := (b-a) + (d-c) - (r-a) - (b-s) = d - c - r + s$ und definieren

$$\theta : \;]r-(d-c),\; s+(d-c)[\; \to\; M\,, \quad \theta(t) \;:=\; \begin{cases} \eta(d-r+t) & \text{wenn } t \in \;]r-(d-c), r[; \\ \gamma(t) & \text{wenn } t \in \;]a,b[; \\ \eta(c-s+t) & \text{wenn } t \in \;]s, s+(d-c)[. \end{cases}$$

Nach dem Vorigen ist θ wohldefiniert und man sieht nun leicht, dass θ ein auf Bogenlänge parametrisierter (und somit regulärer) C^1-Weg ist, der auf $]r, r+\ell[$ injektiv ist und derart, dass

$$\theta(t+\ell) \;=\; \theta(t) \qquad \text{wann immer } t, t+\ell \in \;]r-(d-c), s+(d-c)[.$$

Folglich ist durch $\bar{\theta}(t) := \theta(t + k\ell)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ derart, dass $t + k\ell \in \,]r - (d-c), s + (d-c)[$ eine ℓ-periodische Funktion $\bar{\theta}\colon \mathbb{R} \to M$ wohldefiniert. Diese setzt θ fort und ist somit ein regulärer C^1-Weg. Nun ist $\theta(\mathbb{R}) = \gamma(I) \cup \eta(I)$ offen in M aber wegen der Periodizität auch $\theta(\mathbb{R}) = \theta([0, \ell])$ kompakt, somit abgeschlossen in M, folglich $M \setminus \theta(\mathbb{R})$ offen in M. Da M wegzusammenhängend und somit zusammenhängend ist, folgt $M = \theta(\mathbb{R})$. Also ist $M = \theta(\mathbb{R})$ eine geschlossene C^1-Kurve und somit insbesondere $\gamma(I) \cup \eta(J) = M$ kompakt; wir sind also in der Situation von (a) und haben die gewünschte Schlussfolgerung bewiesen. □

Satz B.11 (1-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeiten). *Jede wegzusammenhängende kompakte* 1*-dimensionale Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^n$ ist eine geschlossene C^1-Kurve.*

Beweis. Für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine Karte $\gamma\colon I \to V_x \subseteq M$ mit $x \in V_x$, wobei I eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Nach Ersetzen von I durch ein kleines Intervall um $\gamma^{-1}(x)$ dürfen wir annehmen, dass I ein offenes beschränktes Intervall ist und γ eine endliche Bogenlänge besitzt. Nach Lemma B.8 können wir γ durch einen auf Bogenlänge parametrisierten Weg mit dem gleichen Bild ersetzen. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass γ auf Bogenlänge parametrisiert ist. Da die hier auftretenden Mengen V_x eine offene Überdeckung der kompakten Menge M bilden, finden wir endlich viele auf offenen beschränkten Intervallen $I_1, \ldots, I_k$ definierte, auf Bogenlänge parametrisierte C_1-Wege $\gamma_j\colon I_j \to M$, deren Bilder $W_j := \gamma_j(I_j)$ die Menge M überdecken.

Wir zeigen nun durch Induktion nach k, dass M eine geschlossene C^1-Kurve ist.

Fall $k = 1$: Kann nicht auftreten, da sonst das offene Intervall I_1 zu M homöomorph und somit kompakt wäre.

Fall $k = 2$: Wäre $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, so wären W_1 und W_2 disjunkte, nicht-leere offene Mengen, die M überdecken; daher wäre M nicht zusammenhängend und somit auch nicht wegzusammenhängend, Widerspruch. Da $M = W_1 \cup W_2 = \gamma_1(I_1) \cup \gamma_2(I_2)$, ist M nach Lemma B.10 (a) eine geschlossene C^1-Kurve.

Induktionsschritt: Es sei nun $k \geq 3$ und die Aussage für $k - 1$ bereits gezeigt. Wie im vorigen Fall sehen wir, dass $W_1 \cap (W_2 \cup \cdots \cup W_k) \neq \emptyset$ sein muss. Nach Umnummerieren von $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ dürfen wir daher o.B.d.A. annehmen, dass $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. 1. Fall: $W_1 \cup W_2$ ist kompakt. Dann ist $W_1 \cup W_2$ in M abgeschlossen und somit $M \setminus (W_1 \cup W_2)$ eine in M offene Menge, die die offene Menge $W_1 \cup W_2$ nicht trifft. Da M zusammenhängend ist, muss $W_1 \cup W_2 = M$ sein; somit ist M nach Lemma B.10 (a) eine geschlossene C^1-Kurve. 2. Fall: $W_1 \cup W_2$ ist nicht kompakt. Dann gibt es nach Lemma B.10 (b) ein beschränktes offenes Intervall $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $I_1 \subseteq E$ und einen auf Bogenlänge parametrisierten C^1-Weg $\gamma\colon E \to M$ derart, dass $\gamma(E) = W_1 \cup W_2$ und $\gamma|_{I_1} = \gamma_1$. Wir können nun $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ durch die $k-1$ Wege $\gamma, \gamma_3, \ldots, \gamma_k$ ersetzen und erhalten per Induktion, dass M eine geschlossene C^1-Kurve ist. □

Ähnlich kann man zu jeder nicht-kompakten, wegzusammenhängenden 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine globale Karte $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ konstruieren.

Wohldefiniertheit der Randintegrale

Der Vollständigkeit halber begründen wir noch die Wohldefiniertheit der in Kapitel 13 auftretenden Randintegrale.

Lemma B.12 *Sind $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Weg, $\tau : I \to J$ ein Diffeomorphismus mit $\tau'(t) > 0$ für alle t und $F\colon \gamma(J) \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion derart, dass das Integral $\int_\gamma \langle F,\, d\vec{s}\rangle$ existiert, so existiert auch $\int_{\gamma\circ\tau} \langle F,\, d\vec{s}\rangle$ und es gilt*

$$\int_\gamma \langle F,\, d\vec{s}\rangle \;=\; \int_{\gamma\circ\tau} \langle F,\, d\vec{s}\rangle\,.$$

Beweis. Nach der Substitutionsregel ist $\int_I F_j(\gamma(\tau(t)))\,\underbrace{(\gamma_j\circ\tau)'(t)}_{=\gamma_j'(\tau(t))\tau'(t)}\,dt = \int_J F_j(\gamma(s))\gamma_j'(s)\,ds$ für $j = 1, \ldots, n$, woraus die Behauptung folgt. □

Lemma B.13 *Das Integral $\int_{\partial K} \langle F,\; d\vec{s}\rangle$ in Definition* 13.10 *ist wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Kurven Γ_j und der Karten η_j.*

Beweis. Schreibt man ∂K als disjunkte Vereinigung von geschlossenen C^1-Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, so ist jedes Γ_j wegzusammenhängend und ist daher in einer Wegkomponente W von ∂K enthalten. Weiter ist Γ_j kompakt und hat kompaktes (und somit abgeschlossenes) Komplement $\bigcup_{i\neq j} \Gamma_i$ in ∂K, weswegen Γ_j auch offen in ∂K ist. Da W zusammenhängend ist und $W = \Gamma_j \cup (W \setminus \Gamma_j)$ eine Zerlegung in disjunkte offene Mengen, muss $\Gamma_j = W$ sein. Also sind die Mengen Γ_j genau die Wegkomponenten von ∂K. In welcher Reihenfolge man diese nummeriert hat, beinflusst die zur Integraldefinition benutzte Summe natürlich nicht. Wir müssen daher nur noch zeigen: Sind $\eta : I \to \Gamma_j$ und $\zeta : J \to \Gamma_j$ auf offenen Intervallen definierte Karten für Γ_j derart, dass K links von η und ζ liegt und $\Gamma_j \setminus \eta(I)$ und $\Gamma_j \setminus \zeta(J)$ einpunktige Mengen sind, so ist

$$\int_\eta \langle F,\, d\vec{s}\rangle \;=\; \int_\zeta \langle F,\, d\vec{s}\rangle\,. \tag{138}$$

Ist $\eta(I) = \zeta(J)$, so ist $\tau := \eta^{-1}\circ\zeta : J \to I$ nach Satz 9.26 ein Diffeomorphismus. Da $\eta\circ\tau = \zeta$, ist $\tau'(t)\,\eta'(\tau(t)) = \zeta'(t)$ für $t \in J$; da der äußere Normalenvektor $\nu(\zeta(t))$ sowohl mit $\eta'(\tau(t))$ als auch mit $\zeta'(t) = \tau'(t)\,\eta'(\tau(t))$ ein Rechtssystem bildet, muss $\tau'(t) > 0$ sein. Die Integrale in (138) stimmen somit nach Lemma B.12 überein. Ist andererseits $\eta(I) \neq \zeta(J)$, so ist $\eta(I)\setminus\zeta(J) = \{\eta(s)\}$ für ein $s \in I$ und $\zeta(J)\setminus\eta(I) = \{\zeta(r)\}$ für ein $r \in J$. Ist $I = \,]a, b[$, $J = \,]c, d[$, so folgt

$$M \;:=\; \eta(]a, s[) \cup \eta(]s, b[) \;=\; \zeta(]c, r[) \cup \zeta(]r, d[)\,.$$

Die beiden Mengen auf der linken Seite sind wegzusammenhängend, disjunkt, offen und nicht leer; sie sind also die beiden Wegkomponenten von M. Analoges gilt auf der rechten Seite. Folglich haben $\eta|_{]a,s[}$ und $\eta_{]s,b[}$ die gleichen Bilder wie die zwei Einschränkungen von ζ, und wie zuvor sehen wir nun mit Lemma B.12, dass die Wegintegrale längs der Teilwege übereinstimmen und somit auch die Wegintegrale längs η und ζ. □