Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 28. Juni 2006

Analysis IV

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Meßbare Mengen und Funktionen

(a) Zeigen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Borelmenge ist. Ist die folgende Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar?

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{sonst?} \end{cases}$$

(b) Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Mengen $X_n \in \mathcal{S}$ mit Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist meßbar (also $A \in \mathcal{S}$) genau dann, wenn $A \cap X_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

LÖSUNG:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen und somit eine Borelmenge. Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar, so ist also $A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ als abzählbare Vereinigung von Borelmengen.

Wenn Sie wollen, können Sie auch $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ schreiben und erhalten $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Nach dem Vorigen ist $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und somit auch $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Um f auf Meßbarkeit zu überprüfen, sei $A \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ist $0 \notin A$, so ist $f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{Q}$ abzählbar und somit eine Borelmenge. Ist $0 \in A$, so ist $f^{-1}(A) = \mathbb{Q}^c \cup (f^{-1}(A) \cap \mathbb{Q})$, wobei $\mathbb{Q}^c$ und die abzählbare Menge $f^{-1}(A) \cap \mathbb{Q}$ Borelmengen sind. Folglich ist auch ihre Vereinigung $f^{-1}(A)$ eine Borelmenge. Also ist f meßbar.

(b) Ist $A \in \mathcal{S}$, so ist auch $X_n \cap A \in \mathcal{S}$ als Schnitt zweier meßbarer Mengen. Ist Umgekehrt $A \subseteq X$ eine Teilmenge derart, dass $A \cap X_n \in \mathcal{S}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$A = X \cap A = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\Big) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n \cap A) \in \mathcal{S}$$

als abzählbare Vereinigung meßbarer Mengen. Das letzte Gleichheitszeichen beruht hierbei auf Aufgabe **G1** (a).

(G 2) Meßbar oder nicht?

Wir betrachten die von der Menge $\mathcal{E} := \{\{1,2,3\}, \{3,4\}\}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{S} := \sigma(\mathcal{E})$ auf $X := \{1,2,3,4\}$. Untersuchen Sie die Funktion $f\colon (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ auf Meßbarkeit:

(a) $f(x) := (x-3)^2$, (b) $f(x) := |x - \frac{3}{2}|$.

LÖSUNG:

(a) Da einpunktige Teilmengen $\{y\}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und somit Borelmengen sind, gilt $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\} \in \mathcal{S}$, falls f meßbar ist. Für die vorgegebene Funktion f ist jedoch $f^{-1}(\{3\}) = \{x \in \{1,2,3,4\} : (x-3)^2 = 4\} = \{1\} \notin \mathcal{S}$. Also ist f nicht meßbar.

(b) **Erste Lösung:** Die Funktion g nimmt drei Werte an; ihr Bild ist $\operatorname{im}(g) = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$. Jede der Mengen

$$g^{-1}(\{1/2\}) \;=\; \{1,2\}\,, \qquad g^{-1}(\{3/2\}) \;=\; \{3\}\,, \quad \text{und} \qquad g^{-1}(\{5/2\}) \;=\; \{4\}$$

ist meßbar (also ein Element von $\mathcal{S}$). Für das Urbild jeder Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt dann

$$g^{-1}(A) \;=\; g^{-1}(A \cap \operatorname{im}(g)) \;=\; g^{-1}\left(\bigcup_{y \in A \cap \operatorname{im}(g)} \{y\}\right) \;=\; \bigcup_{y \in A \cap \operatorname{im}(g)} g^{-1}(\{y\}) \;\in\; \mathcal{S}\,,$$

denn $g^{-1}(A)$ ist eine endliche Verenigung von Mengen aus $\mathcal{S}$. Hierbei wurde für das letzte Gleichheitszeichen die Operationentreue der Urbildabbildung benutzt.

Zweite Lösung: Nach Folgerung 1.27 (e) ist die Funktion g genau dann meßbar, wenn $g^{-1}(]-\infty, b]) \in \mathcal{S}$ für alle $b \in \mathbb{R}$. Dies aber ist der Fall, denn es ist

$$g^{-1}(]-\infty, b]) \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{falls } b < \frac{1}{2}\;; \\ \{1,2\} & \text{falls } b \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\\ \{1,2,3\} & \text{falls } b \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[\\ \{1,2,3,4\} & \text{falls } b \geq \frac{5}{2}\;. \end{cases}$$

(G 3) Stückweise definierte Funktionen

Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ meßbare Räume sowie $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von X durch meßbare Mengen A_i. Zeigen Sie, daß jede Funktion $f : X \to Y$, deren Einschränkungen $f_{|A_i} : A_i \to Y$ meßbar sind, meßbar ist.

LÖSUNG:

Ist $B \subset Y$ eine meßbare Menge, so gilt $f^{-1}(B) = \bigcup_{i \in I} f_{|A_i}^{-1}(B)$. Die Mengen $f_{|A_i}^{-1}(B)$ sind nach Annahme meßbar. Weiterhin gilt $f^{-1}(B) \cap A_i = f_{|A_i}^{-1}(B)$. Nach aufgabe G1 (b) ist $f^{-1}(B)$ somit meßbar. Daher ist f eine meßbare Funktion.

(G 4) Eine stückweise definierte Funktion

Ist die durch

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \sin x & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}\,; \\ \cos x & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar?

LÖSUNG:

Die Borelmengen $X_1 := \mathbb{Q}$ und $X_2 := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ überdecken $\mathbb{R}$ (also $\mathbb{R} = X_1 \cup X_2$). Nach Satz 1.36 über stückweise meßbare Funktionen ist f meßbar, wenn $f|_{X_k} \colon (X_k, \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_k}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar ist für $k \in \{1,2\}$. Dies aber ist der Fall: Nach Satz 1.32 ist nämlich $\mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_k} = \mathcal{B}(X_k)$. Da $f|_{X_1} = \sin|_{X_1}$ und $f|_{X_2} = \cos|_{X_2}$ stetig sind, ist

$$f_k|_{X_k} : \,(X_k, \mathcal{B}(X_k)) = (X_k, \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_k}) \;\to\; (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

meßbar nach Folgerung 1.26.

Hausübungen

(H 1)

wir betrachten die reellen Zahlen mit der Borel-σ-Algebra. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Ist f meßbar?

LÖSUNG:

Die Funktion f ist meßbar. Wir nehmen an, daß f monoton steigend ist. Es genügt zu zeigen, daß die Urbilder der Mengen $]-\infty, r]$, $r \in \mathbb{R}$ meßbar sind. Da die Funktion f monoton steigend ist, gilt $f^{-1}(]-\infty, r]) =]-\infty, a]$ oder $f^{-1}(]-\infty, r]) =]-\infty, a[$ mit $a \in \mathbb{R}$ (wobei $a = \infty$ möglich ist). Somit ist f meßbar. Im Falle einer monoton fallenden Funktion geht man analog vor.

(H 2) Meßbar oder nicht?

Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar ist:

$$f(x) := \begin{cases} [\frac{1}{x}] \cdot x & \text{falls } x \neq 0\,; \\ 0 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

LÖSUNG:

Die Funktion f ist meßbar. Um dies einzusehen, schauen wir zunächst die Funktion $x \mapsto [\frac{1}{x}]$ genauer an. Diese ist stückweise konstant: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\left[\frac{1}{x}\right] = \begin{cases} n & \text{falls } x \in \,]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \;=: X_n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}\,; \\ 0 & \text{falls } x \in \{0\} \cup [1, \infty[\;=: X_0\,; \\ -1 & \text{falls } x \in \,]-\infty, -1] =: X_{-1}. \end{cases}$$

Hier ist $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} X_n = \mathbb{R}$, und jedes X_n ist eine Borelmenge. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$f|_{X_n}\colon X_n \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto nx$$

stetig, also ist $f|_{X_n} : (X_n, \mathcal{B}(X_n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar. Da $\mathcal{B}(X_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_n}$ gilt , ist $f|_{X_n}\colon (X_n, \mathcal{B}(\mathbb{R})|_{X_n}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar. Somit ist auch f meßbar.

Alternativer Beweis: f ist ein Produkt der meßbaren Funktion $x \mapsto x$ und einer Funktion, welche sich schreiben lässt als Komposition der Gaußklammer (deren Meßbarkeit bereits gezeigt wurde) und der Funktion $0 \neq x \mapsto 1/x$; $0 \mapsto 0$ (deren Meßbarkeit ebenfalls schon gezeigt wurde). Da Kompositionen und Produkte meßbarer Funktionen meßbar sind, ist f meßbar.