**Fachbereich Mathematik**
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 28. Juni 2006

# Analysis IV

## 7. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 1) Verknüpfung meßbarer Funktionen**

Es seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ und $(Z, \mathcal{D})$ meßbare Räume sowie $g : X \to Y$ und $f : Y \to Z$ zwei meßbare Funktionen. Beweisen Sie, daß die Verknüpfung $f \circ g$ meßbar ist.

LÖSUNG:

Es sei $D \in \mathcal{D}$ eine meßbare Menge in $Z$. Da $f$ meßbar ist, ist auch die Menge $f^{-1}(D)$ meßbar (in $Y$). Weil auch $g$ meßbar ist, folgt somit daß die Menge $g^{-1}(f^{-1}(D)) = (f \circ g)^{-1}(D)$ meßbar ist. Somit ist $f \circ g$ eine meßbare Funktion.

**(G 2) Operationen auf meßbaren Funktionen**

Wir betrachten die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$. Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei meßbare Funktionen. Untersuchen sie die folgenden Funktionen auf Meßbarkeit:

(a) $f + g$ (b) $\min\{f, g\}$ (c) $\max\{f, g\}$ (d) $f \cdot g$ (e) $|f|$

LÖSUNG:

- Da die Addition stetig ist, ist sie auch meßbar. Somit ist $f + g$ eine Verknüpfung meßbarer Funktion und daher meßbar.
- Es genügt die Meßbarkeit der Urbilder $(\min\{f, g\})^{-1}(O)$ offener Intervalle $O$ zu zeigen. Da die Menge alller offener Intervalle von der Menge aller (halb)offen Intervalle der Form $(-\infty, a]$ bzw. $(-\infty, a]$ erzeugt wird, genügt es, solche Intervalle zu bertrachten. Da sowohl $f$ als auch $g$ meßbar sind, sind die Urbilder $f^{-1}((-\infty, a])$ und $g^{-1}((-\infty, a])$ von Intervallen der Form $(-\infty, a]$ meßbar. weiterhin gilt $(\min\{f, g\})^{-1}((-\infty, a]) = f^{-1}((-\infty, a]) \cup g^{-1}((-\infty, a])$, d.h. diese Mengen sind meßbar. Das gleiche gilt für die Intervalle der Sorte $(-\infty, a]$. Somit ist $\min\{f, g\}$ meßbar.
- Es genügt die Meßbarkeit der Urbilder $(\max\{f, g\})^{-1}(O)$ offener Intervalle $O$ zu zeigen. Da die Menge alller offener Intervalle von der Menge aller (halb)offen Intervalle der Form $(a, \infty)$ bzw. $[a, \infty)$ erzeugt wird, genügt es, solche Intervalle zu bertrachten. Da sowohl $f$ als auch $g$ meßbar sind, sind die Urbilder $f^{-1}((a, \infty))$ und $g^{-1}((a, \infty))$ von Intervallen der Form $(a, \infty)$ meßbar. weiterhin gilt $(\max\{f, g\})^{-1}((a, \infty)) = f^{-1}((a, \infty)) \cup g^{-1}((a, \infty, a))$, d.h. diese Mengen sind meßbar. Das gleiche gilt für die Intervalle der Sorte $[a, \infty)$. Somit ist $\max\{f, g\}$ meßbar.
- Da die Multiplikation stetig ist, ist sie auch meßbar. Somit ist $f \cdot g$ eine Verknüpfung meßbarer Funktion und daher meßbar.

- Da die Norm $|\cdot|$ stetig ist, ist sie auch meßbar. Somit ist $|f|$ eine Verknüpfung meßbarer Funktion und daher meßbar.

### (G 3) charakteristische Funktionen

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge von $X$. Zeigen Sie, daß die charakteristische Funktion $\chi_A$ von $A$ genau dann meßbar ist, wenn $A \in \mathcal{A}$ gilt, d.h. wenn $A$ meßbar ist.

LÖSUNG:

Ist die charakteristische Funktion $\chi_A$ von $A$ meßbar, so ist auch $A = \chi_A^{-1}(1)$ meßbar. Die möglichen Urbilder der charakteristische Funktion $\chi_A$ sind nach Definition die Mengen $X$, $A$, $X \setminus A$ und die leere Menge $\emptyset$. Ist also $A$ meßbar, so sind alle möglichen Urbilder meßbar. Somit ist in diesem Fall auch $\chi_A$ meßbar.

### (G 4) Nicht meßbare Funktionen

Geben Sie ein Beispiel einer nicht meßbaren Funktion (auf $\mathbb{R}$) an.

LÖSUNG:

Ein Beispiel sind charakteristische Funktionen nicht meßbarer Mengen, z.B. die der Menge aus Aufgabe G2, 5. Übung.

### (G 5) Zerlegung meßbaren Funktionen

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-$\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann meßbar ist, wenn die Funktionen $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$ meßbar sind.

LÖSUNG:

Ist die Funktion $f$ meßbar, so sind nach Aufgabe 2 auch die Funktionen $f^+$ und $f^-$ meßbar. sind umgekehrt $f^+$ und $f^-$ meßbar, so ist $f = f^+ - f^-$ auch meßbar, da die subtraktion eine stetige und somit meßbare Funktion ist.

## Hausübungen

### (H 1) Meßbarkeit von Funktionen

Untersuchen Sie folgende reelle Funktionen auf Meßbarkeit:

(a) $[\bullet] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, [x] = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases}$

LÖSUNG:

- Für alle Teilmengen $M \subset \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ gilt $[\bullet]^{-1}(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{M}} [n, n+1)$. Somit ist die Funktion $[\bullet]$ meßbar.
- Es genügt die Urbilder offener Mengen zu betrachten. Ist $O$ eine offene Menge, so gilt

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(O \cap \mathbb{R}^\times) \cup f^{-1}(O \cap \{0\})$$

  Die Menge $f^{-1}(O \cap \{0\})$ ist höchstens einpunktig, also meßbar. Die Menge $f^{-1}(O) = f^{-1}(O \cap \mathbb{R}^\times)$ ist das Urbild der offenen Menge $O \cap \mathbb{R}^\times$ unter der stetigen Funktion $f_{|\mathbb{R}^\times}$, und somit offen in $\mathbb{R}^\times$. Daher ist sie auch offen in $\mathbb{R}$ und somit meßbar. Damit ist das Urbild von $O$ als Vereinigung meßbarer Mengen wieder meßbar.

### (H 2) Operationen auf meßbaren Funktionen

Wir betrachten die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$. Weiterhin sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge meßbare Funktionen. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Meßbarkeit:

(a) $\sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (b) $\limsup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

LÖSUNG:

- Es genügt die Meßbarkeit der Urbilder $(\sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})^{-1}(O)$ offener Intervalle $O$ zu zeigen. Da die Menge allller offener Intervalle von der Menge aller offen Intervalle der Form $(a, \infty)$ erzeugt wird, genügt es, solche Intervalle zu bertrachten. Da alle $f_n$ meßbar sind, sind die Urbilder $f_n^{-1}((a, \infty))$ von Intervallen der Form $(a, \infty)$ meßbar. Weiterhin gilt $(\sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}((a, \infty))$, d.h. diese Mengen sind meßbar. Somit ist $\sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ meßbar.
- Es gilt $\limsup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \to \infty} \sup\{f_k \mid k \geq n\}$. Die Funktion $\limsup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist also der Grenzwert der monton fallenden Folge meßbarer Funktionen $\sup\{f_k \mid k \geq n\}$. wie zuvor genügt es die Meßbarkeit der Urbilder $(\sup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})^{-1}(O)$ offener Intervalle $O$ zu zeigen. Da die Menge allller offener Intervalle von der Menge aller offen Intervalle der Form $(a, \infty)$ erzeugt wird, genügt es, solche Intervalle zu bertrachten. Da alle $f_n$ meßbar sind, sind nach a) auch die Funktionen $\sup\{f_k \mid k \geq n\}$ meßbar. Es gilt $(\limsup\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\})^{-1}((a, \infty)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\sup\{f_k \mid k \geq n\})^{-1}((a, \infty))$. Somit ist diese Funktion meßbar.