Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

Analysis IV

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Lesbesgue-Borel Maß einiger Borelmengen

Wir betrachten die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie das Lesbesgue-Maß der folgenden Mengen:

(a) $]0,1[$ (b) $[0,1]$ (c) $\{0\}$ (d) $\mathbb{Q}$ (e) $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ (f) $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$

LÖSUNG:

- $\lambda(]0,1[) = 1$ nach Definition des Lesbesgue-Maßes.
- $\lambda([0,1]) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})\right) = \lim\lambda((-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})) = 1$
- $\lambda(\{0\})\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right) = \lim\lambda((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = 0$
- Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Vereinigung von Punkten ist, gilt $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.
- $\lambda([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0$
- $[0,1]\setminus\mathbb{Q} = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 1-0 = 1$

(G 2) Hyperebenen

(a) Welches Maß hat die $n-1$-Fläche $[0,1]^{n-1}\times\{0\}$ im $\mathbb{R}^n$?

(b) Welches Maß hat die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ im $\mathbb{R}^n$?

(c) Welches Maß haben beliebige affine Ebenen geringerer dimension im $\mathbb{R}^n$?

LÖSUNG:

- $\lambda([0,1]^{n-1}\times\{0\}) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^{n-1}\times(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0.$
- $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\} = \bigcup_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{N}}[x_1, x_1+1]\times\cdots\times[x_{n-1}, x_{n-1}+1]\times\{0\} \longrightarrow \lambda(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}) = \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}} 0 = 0$
- Eine affine Ebene E in $\mathbb{R}^n$ hat die Form $E = \mathbf{v} + O(\mathbb{R}^p)$, wobei O eine orthogonale Abbildung ist und $p\le n$ gilt. Für $p<n$ folgt aus der Transformationsformel $\lambda(E) = 0$.

(G 3) Die verallgemeinerte Cantormenge

Es sei (α_n) eine Folge reeller Zahlen mit $\alpha_n\in]0,1[$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wir definieren nun eine Folge A_n von Teilmengen von $\mathbb{R}$. $A_0 = [0,1]$ sei das Einheitsintervall. Aus A_0 entfernen wir das offene Teilintervall der Länge α_1 mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ und definieren A_1 als die Vereinigung der verblieben Intervalle $I_{1,1}$ und $I_{1,2}$. Die Mengen A_n werden nun rekursiv definiert. Haben wir A_n als vereinigung der Intervalle $I_{n,1},\ldots,I_{n,2^n}$ erhalten so entfernen wir aus den

Intervallen $I_{n,j}$ die offenen Teilintervalle $\alpha_{n+1} I_{n,j}$, deren Mittelpunkte mit denen von $I_{n,j}$ übereinstimmen und erhalten die Menge A_{n+1} als Vereinigung der verbleibenden Intervalle $I_{n+1,1}, \ldots, I_{n,2^{n+1}}$. Den Schnitt $C = \bigcap A_n$ nennen wir eine verallgemeinerte Cantor-Menge. Beweisen sie $\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \alpha_n)$

LÖSUNG:

Wir zeigen $\lambda(A_n) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$ für $n > 0$ mit Induktion über n. Für das einheitsintervall A_0 gilt $\lambda(A_0) = 1$. Ist A_n die Vereinigung der Intervalle $I_{n,1}, \ldots, I_{n,2^n}$, so haben die Intervalle $I_{n+1,2j}$ und die Länge $\frac{1}{2}(1 - \alpha_{n+1})\lambda(\alpha I_{n,j})$. Die Vereinigung A_{n+1} dieser 2^{n+1} Intervalle hat daher das Maß $(1 - \alpha_{n+1})\lambda(A_n)$. Somit folgt $\lambda(A_n) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$ für alle $n > 0$. Da diese Folge streng monoton fallend ist und nach unten beschränkt ist, existiert ihr Grenzwert. Es folgt $\lambda(C) = \lambda\left(\bigcap A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \alpha_n)$.

(G 4) Dichte, offene Mengen von kleinem Maß

(a) Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare unendliche Menge ist, gibt es eine Bijektion $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto q_n$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n}[$$

nicht leer ist.

(b) Finden Sie zu $\varepsilon > 0$ eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ vom Maß $\lambda(U) \leq \varepsilon$ derart, dass U in $\mathbb{R}$ dicht ist (d.h. daß $U \cap V \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$ gilt).

LÖSUNG:

(a) Wir haben zu zeigen, dass $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n}[$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Da $\lambda(\mathbb{R}) = \lim_{n \to \infty} \lambda([-n, n[) = \infty$, brauchen wir hierzu nur $\lambda(U) < \infty$ nachzuweisen. Nach Lemma 2.4 (e) ist tatsächlich

$$\lambda(U) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(]q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n}[) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-n} \ = \ 2 \ < \ \infty\,.$$

(b) Gegeben $\varepsilon > 0$ setzen wir $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]q_n - \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n},\ q_n + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n}[$. Dann ist U offen als Vereinigung offener Mengen. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist und $\mathbb{Q} \subseteq U$, ist weiter U dicht in $\mathbb{R}$. Schließlich zeigt die gleiche Rechnung wie in (a), dass $\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\, \frac{\varepsilon}{2}\, 2^{-n} = \varepsilon$.

(G 5) Urbilder borelscher Mengen

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, daß Urbilder von Borelmengen unter f wieder Borelmengen sind.

LÖSUNG:

Da f stetig ist, sind Urbilder offener Mengen wieder offen also insbesondere Borelmengen. Da die Menge $\mathcal{T}$ aller offenen Mengen die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt, folgt $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{T})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Hausübungen

(H 1) Bilder stetiger Funktionen

Zeigen Sie, daß das Bild einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ nicht immer Maß 0 hat.

Hinweis: Betrachten Sie eine Peano-Kurve.

LÖSUNG:

Es sei $p : I \to [0,1]^2$ eine Peano-Kurve, d.h. eine stetige surjektive Abbildung. Das Maß des Bildes $\lambda(p(I)) = \lambda([0,1]^2)$ ist somit 1.

(H 2) Etwas verzwicktere Teilmengen

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung bis zur Stelle n keine 7 enthält, A die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung keine 7 enthält sowie B die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1[$, deren Dezimalbruchentwicklung mindestens eine 7 enthält. (Hierbei betrachten wir nur Dezimalbrüche ohne Neunerperiode).
Zeigen Sie, dass A_n, A und B Borelmengen sind und berechnen Sie das Lebesgue-Borel-Maß dieser Mengen.

LÖSUNG:

Die Menge $J_n := \{0,1,2,3,4,5,6,8,9\}^n$ aller n-Tupel aus von 7 verschiedenen Ziffern hat 9^n Elemente, und es ist

$$A_n = \bigcup_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} [0.d_1 \cdots d_n,\ 0.d_1 \cdots d_n + 10^{-n}[\,.$$

Als endliche Vereinigung halboffener Intervalle ist A_n eine Borelmenge. Da die beteiligten Intervalle paarweise disjunkt sind, folgt

$$\lambda(A_n) = \sum_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} \lambda(\,[0.d_1 \cdots d_n,\ 0.d_1 \cdots d_n + 10^{-n}[\,) = \sum_{(d_1,\ldots,d_n)\in J_n} 10^{-n} = 9^n \cdot 10^{-n}\,,$$

also $\lambda(A_n) = (\frac{9}{10})^n$. Weiter ist $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, und da $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ und $\lambda(A_1) < \infty$, folgt mit Lemma 2.4 (d)

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0\,.$$

Weiter ist $B = [0,1[\,\setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(B) = \lambda([0,1[) - \lambda(A) = 1 - 0 = 1$.