Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 28. Juni 2006

Analysis IV

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) Urbilder von σ-Algebren

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf Y. Beweisen Sie, daß das Urbild $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}(X)$ von $\mathcal{S}$ unter f eine σ-Algebra ist.

LÖSUNG:

Wir Überprüfen die Axiome **S1–S3** einer σ-Algebra, unter Benutzung der "Operationentreue der Urbild-Abbildung".

S1: Da $\emptyset \in \mathcal{S}$, ist $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{S})$

S2: Ist $B \in f^{-1}(\mathcal{S})$, so existiert $A \in \mathcal{S}$ mit $B = f^{-1}(A)$. Dann ist $A^c \in \mathcal{S}$ und somit $B^c = f^{-1}(A^c) \in f^{-1}(\mathcal{S})$.

S3: Sind $B_1, B_2, \ldots \in f^{-1}(\mathcal{S})$, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $A_n \in \mathcal{S}$ mit Urbild $f^{-1}(A_n) = B_n$. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ und somit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \;=\; f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \;\in\; f^{-1}(\mathcal{S}).$$

(G 2) Äußere Maße

Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X für die $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ gilt sowie $\varrho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ eine Funktion die $\varrho(\emptyset) = 0$ erfüllt. Weiterhin sei μ^* das von ϱ induzierte äußere Maß auf X.

(a) Gilt $\mu^* \leq \varrho$ auf $\mathcal{E}$?

(b) Beweisen Sie, daß für jedes äußere Maß τ auf X aus $\tau \leq \varrho$ auf $\mathcal{E}$ schon $\tau \leq \mu^*$ folgt.

LÖSUNG:

(a) Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt $A \subset A \bigcup_{n=2}^{\infty} \emptyset$ somit folgt $\mu^*(A) \leq \varrho(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \varrho(\emptyset) = \varrho(A)$.

(b) Es sei τ ein äußeres Maß auf X. Für jede Teilmenge A von X mit $A \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ und $A_n \in \mathcal{E}$ gilt $\tau(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$. Somit folgt $\tau \leq \mu^*$.

(G 3) Stetigkeit von oben

Es sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$ und $A_n := (0, \frac{1}{n})$ eine fallende Folge von Teilmengen. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ und $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Satz über induzierte äußere Maße ?

LÖSUNG:

Es gilt $\mu(A_n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ folgt $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$. Dies steht nicht im Widerspruch zu o.g. Satz, da dieser die Endlichkeit des Maßes einer der Mengen A_n als Vorraussetzung hat.

(G 4) Fortsetzung von Maßen

Es sei $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und ϱ das Zählmaß auf $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie das von ϱ induzierte äußere Maß μ^* auf $\mathbb{R}$. Wie läßt sich μ^* sinnvoll auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ definieren, welche nicht durch Mengen $A_n \in \mathcal{E}$ überdeckt werden können?

(b) Finden Sie eine weitere Fortsetzung von ϱ, welche nicht mit μ^* übereinstimmt.

LÖSUNG:

(a) Es sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Falls es keine Überdeckung von A durch Mengen A_n aus $\mathcal{E}$ gibt, setzen wir $\mu^*(A) = \infty$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine irrationale Zahl $x \in A$ gibt. Ansonsten gilt $\mu^*(A) = \varrho(A)$.

(b) Das Zählmaß auf $\mathbb{R}$ ist eine andere Fortsetzung von ϱ zu einem Maß auf $\mathbb{R}$.

(G 5) Einschränkung von Maßen

Es sei $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{S}$ eine meßbare Teilmenge. Wir betrachten die Menge $\mathcal{S}_{|Y} := \{A \in \mathcal{S} \mid A \subset Y\}$ und die Einschränkung $\mu_{|Y} := \mu_{|\mathcal{S}_{|Y}}$. Zeigen Sie, daß $(Y, \mathcal{S}_Y, \mu_{|Y})$ ein Maßraum ist.

LÖSUNG:

Wir zeigen zuerst, daß $\mathcal{S}_{|Y}$ wieder eine σ-Algebra ist. Da die Menge Y meßbar ist, gilt $\mathcal{S}_{|Y} := \{A \in \mathcal{S} \mid A \subset Y\} = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{S}\}$. Somit folgt:

S1 Es gilt $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{S}_{|Y}$.

S2 Ist $B \in \mathcal{S}_{|Y}$, so ist $B = A \cap Y$ für eine Menge $A \in \mathcal{S}_{|Y}$. Wir formen dies wie folgt um:

$$(X \setminus A) \cap Y \;=\; \underbrace{(X \cap Y)}_{=Y} \setminus \underbrace{(A \cap Y)}_{=B} \;=\; Y \setminus B\,. \tag{1}$$

Da $X \setminus A \in \mathcal{S}$, ist die linke Seite von (1) in $\mathcal{S}|_Y$ und somit auch $Y \setminus B \in \mathcal{S}_{|Y}$.

S3 Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $B_n \in \mathcal{S}_{|Y}$, so gibt es für jedes n eine Menge $A_n \in \mathcal{S}$ mit $B_n = A_n \cap Y$. Mit Aufgabe **G1** (a) und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$ folgt nun

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap Y) \;=\; \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap Y \;\in\; \mathcal{S}|_Y\,.$$

Da das Maß $\mu_{|Y}$ die Einschränkung des Maßes μ von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}_{|Y}$ ist, ist $\mu_{|Y}$ auch σ-additiv und es gilt $\mu_{|Y}(\emptyset) = 0$. Somit ist $(Y, \mathcal{S}_Y, \mu_{|Y})$ ein Maßraum.

Hausübungen

(H 1)

Bearbeiten Sie alle ungelösten Aufgaben des 3. Übungsblattes.

(H 2) Direkte Bilder von σ-Algebren

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra auf X.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{T} := \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist. Man nennt $f_*(\mathcal{S}) := \mathcal{T}$ das *direkte Bild* von $\mathcal{S}$ unter f.

(b) Bestimmen Sie das direkte Bild $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unter der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x] := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$

Hinweis: Gilt z.B. $0 \in f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$?

LÖSUNG:

(a) **S1** Wegen $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{S}$ ist $\emptyset \in \mathcal{T}$.

S2 Ist $A \in \mathcal{T}$, so ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$ und somit $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{S}$, nach Lemma 1.22 (b) (bewiesen in Aufgabe G4 (a)). Also ist $Y \setminus A \in \mathcal{T}$.

S3 Gegeben eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen $A_n \in \mathcal{T}$ gilt $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}$ und somit

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}.$$

Also ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

(b) Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f^{-1}(\{n\}) = [n, n+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Also ist die einpunktige Menge $\{n\}$ im direkten Bild von $\mathcal{S}$ enthalten, es ist $\{n\} \in f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Da jede Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}$ abzählbar ist, folgt

$$A = \bigcup_{n\in A} \{n\} \in f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\,.$$

Somit gehört jede Teilmenge von $\mathbb{Z}$ zu $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, es ist also $f_*(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ die volle Potenzmenge von $\mathbb{Z}$.

(H 3) Äußere Maße II

Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X für die $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ gilt sowie $\varrho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ eine Funktion die $\varrho(\emptyset) = 0$ erfüllt. Weiterhin sei μ^* das von ϱ induzierte äußere Maß auf X. In welchen Fällen gilt $\varrho = \mu^*_{|\mathcal{E}}$?