**Fachbereich Mathematik**
Prof. B. Farkas
Martin Fuchssteiner
Lisa Steiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 06 17.07.2006

# Analysis IV

## 13. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 1) Berechnung einiger Volumina**

(a) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ des Ellipsoids $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$, wobei $a, b, c > 0$.
*Hinweis:* Benutzen Sie das Prinzip von Cavalieri und Aufgabe G1 vom 12. Übungsblatt.

(b) Berechnen Sie mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Körpers $M := K \cap Z$, der durch Schneiden der Kugel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und des Zylinders $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ entsteht.

LÖSUNG:

(a) Gegeben $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1 - (z/c)^2\}$. Also ist $M_z = \emptyset$ wenn $|z| > c$; $M_z = \{(0,0)\}$ wenn $|z| = c$;

$$M_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{x}{a\sqrt{1-(z/c)^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b\sqrt{1-(z/c)^2}}\Big)^2 \leq 1\right\}$$

wenn $|z| < c$. Letzteres ist eine Ellipse, deren Flächeninhalt laut G1 vom 12. Übungsblatt,

$$\lambda_2(M_z) = \pi a\sqrt{1-(z/c)^2} \cdot b \cdot \sqrt{1-(z/c)^2} = \pi ab(1-(z/c)^2)$$

ist. Mit dem Prinzip von Cavalieri erhalten wir folglich

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z) = \int_{[-c,c]} \pi ab(1-(z/c)^2)\, d\lambda_1(z) \\
&= \pi ab \int_{-c}^{c} (1-(z/c)^2)\, dz = \pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2}\right]_{-c}^{c} \\
&= \pi ab\,(2c - 2c/3) = \tfrac{4\pi}{3} abc\,.
\end{aligned}$$

(b) Gegeben $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \emptyset$ falls $|z| > 1$; $M_z = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ (und somit $\lambda_2(M_z) = \pi/2$) falls $|z| \leq \sqrt{2}/2$; $M_z = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}$ (und somit $\lambda_2(M_z) = \pi(1-z^2)$ ) falls $\sqrt{2}/2 < |z| \leq 1$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z) \\
&= \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \pi/2\, dz + \int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \pi(1-z^2)\, dz + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \pi(1-z^2)\, dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\sqrt{2}/2 \;+\; 2\pi\Big[z - z^3/3\Big]_{\sqrt{2}/2}^{1} \;=\; \pi\sqrt{2}/2 \;+\; 2\pi\left(2/3 - \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/12\right) \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

## (G 2) Volumen eines Rotationskörpers

Es sei $r : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ eine messbare Funktion. Uns interessiert das Volumen des Rotationskörpers

$$M \;:=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le r(z)\} \;=\; h^{-1}([0,\infty[)$$

mit $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) := r(z) - \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_3(M) = \pi \int_{\mathbb{R}} r(z)^2 \, d\lambda_1(z)$.

(c) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das Volumen der Menge

$$M \;:=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 1 \text{ und } \sqrt{x^2+y^2} \le z^{-\alpha}\right\}.$$

LÖSUNG:

(a) Die Funktion $h$ ist aus messbaren Funktionen aufgebaut und somit messbar. Da $[0,\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, folgt $M = h^{-1}([0,\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Für $z \in \mathbb{R}$ ist $M_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in M\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \le r(z)\} = K_{r(z)}(0)$ die abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $r(z)$. Das Prinzip von Cavalieri liefert

$$\lambda_3(M) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)\, d\lambda_1(z) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(K_{r(z)}(0))\, d\lambda_1(z) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \pi r(z)^2 \, d\lambda_1(z)\,.$$

Hierbei wurde die (aus der Schule bekannte) Formel $\lambda_2(K_R(0)) = \pi R^2$ für die Kreisfläche benutzt, die wir in Aufgabe G1 vom 12. Übungsblatt (bzw. als Spezialfall dieser Aufgabe) noch einmal verifiziert haben.

(c) Analog zu Teil (b) erhalten wir

$$\lambda_3(M) \;=\; \pi \int_{[1,\infty[} z^{-2\alpha}\, d\lambda_1(z) \;=\; \pi \int_1^\infty z^{-2\alpha}\, dz\,.$$

Für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ist also

$$
\begin{aligned}
\lambda_3(M) \;&=\; \lim_{n\to\infty} \pi \int_1^n z^{-2\alpha}\, dz \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \pi \left[\frac{z^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right]_1^n \;=\; \lim_{n\to\infty} \pi\, \frac{n^{1-2\alpha} - 1}{1-2\alpha} \\
&=\; \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha - 1} & \text{falls } \alpha > \frac{1}{2}; \\ \infty & \text{falls } \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ schließlich ist $\lambda_3(M) = \pi \int_1^\infty \frac{1}{z}\, dz = \infty$.

## (G 3) Volumen eines Rotationskörpers

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ messbar. Wir definieren in $\mathbb{R}^{n+1}$ den Rotationskörper

$$K_f := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [a,b] : \|x\| \leq f(t)\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K_f$ in Abhängigkeit des Volumens $c_n$ der $n$-dimensionalen Einheitskugel mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Funktion $f : [-a,a] \to \mathbb{R}_+$ durch $f(t) = |t|$ gegeben ist. Skizzieren Sie die Situation im Fall $n = 2$.

LÖSUNG:

(a) Wir schneiden die Menge $K_f$ in Scheiben entlang der $t$-Achse: $K_{f,t} := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in K_f\}$. Dann gilt

$$K_{f,t} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq f(t)\}, & t \in [a,b] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit dem Satz von Cavalieri erhält man

$$\lambda_{n+1}(K_f) = \int_a^b \lambda_n(K_{f,t})dt = c_n \int_a^b f(t)^n dt.$$

(b) Aus einer Skizze erkennt man, dass der 3-dimensionale Körper $K_f$ tatsächlich durch Rotation um die $x_3$-Achse entsteht.

Nach (a) gilt

$$\lambda_{n+1}(K_f) = c_n \int_{-a}^a |t|^n dt = 2c_n \int_0^a t^n dt = \frac{2c_n}{n+1} a^{n+1}.$$

### (G 4) Rechenaufgabe zu Flächenintegralen

Berechne das Flächenintegral

$$\int_{\mathbb{S}_2} x^2\, y^2\; dS_{\mathbb{S}_2}(x,y,z).$$

LÖSUNG:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_2} x^2\, y^2\; dS_{\mathbb{S}_2}(x,y,z) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin\theta\cos\phi)^2\, (\sin\theta\sin\phi)^2\; \sin\theta\; d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^4\theta}_{=(1-\cos^2\theta)^2} \;\sin\theta\; \underbrace{\cos^2\phi\sin^2\phi}_{=\frac14\sin^2(2\phi)=\frac18(1-\cos(4\phi))} \; d\phi\, d\theta \\
&= \frac18\, 2\pi \int_0^\pi (1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta)\; \sin\theta\; d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} \Big[ -\cos\theta + \frac23 \cos^3\theta - \frac25 \cos^5\theta \Big]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \Big(1 - \frac23 + \frac25\Big) \;=\; \frac{11}{30}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

## (G 5) Gaußscher Integralsatz

*Satz (Gauß): Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$ äusseres Normalenfeld. Ferner sei $K \subseteq U, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\int_K \operatorname{div} F(x) d\lambda_n(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x) dS_{\partial K}(x).$$

Wir betrachten die Menge $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + z^6 \le 1\}$ und das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y,z) := (x^2y^3,\, xz + xy^4,\, \cos(xy)).$$

(a) Zeige, dass $K$ ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

(b) Berechne das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \langle F(x,y,z),\, \nu(x,y,z)\rangle\, dS_{\partial K}(x,y,z),$$

indem Du es als ein geeignetes Volumenintegral umschreibst; hierbei ist $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von $K$.

Beachte, dass wir $\nu$ gar nicht explizit ausrechnen müssen!

LÖSUNG:

(a) Offensichtlich ist $K$ abgeschlossen und $K$ ist beschränkt, da $|x|, |y|, |z| \le 1$ für alle $(x,y,z) \in K$. Also ist $K$ kompakt. Da $\partial K \subseteq U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ und $K \cap U = \{(x,y,z) \in U : \psi(x,y,z) \le 0\}$ mit $\psi : U \to \mathbb{R}$, $\psi(x,y,z) := x^2 + y^4 + z^6 - 1$ und $\operatorname{grad}\psi(x,y,z) = (2x, 4y^3, 6z^5) \ne (0,0,0)$ für alle $(x,y,z) \in U$, ist $K$ ein Kompaktum mit glattem Rand.

(b) Da $\operatorname{div} F(x,y,z) = 2xy^3 + 4xy^3 = 6xy^3$, erhalten wir mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
&\int \langle F(x,y,z),\, \nu(x,y,z)\rangle\, dS_{\partial K}(x,y,z) \\
&= \int_K \operatorname{div} F(x,y,z)\, d\lambda_3(x,y,z) = \int_K 6\,xy^3\, d\lambda_3(x,y,z) \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} \int_{-\sqrt[6]{1-x^2-y^4}}^{\sqrt[6]{1-x^2-y^4}} 6\,xy^3\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt[4]{1-x^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2}} 12\,xy^3 \sqrt[6]{1-x^2-y^4}\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[-\frac{18}{7}\,(1-x^2-y^4)^{7/6}\Big]_{y=-\sqrt[4]{1-x^2}}^{y=\sqrt[4]{1-x^2}}\, dx = 0.
\end{aligned}$$

## (G 6) Divergenz als Flussdichte

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Für $r > 0$ bezeichne $K_r$ die abgeschlossene Kugel vom Radius $r$ um $x_0$. Wir betrachten den sogenannten "Fluss" $\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x)\rangle\, dS_{\partial K_r}(x)$ von $F$ durch die Sphäre $\partial K_r$ vom Radius $r$ um $x_0$ (wobei $\nu : \partial K_r \to \mathbb{R}^3$ jeweils das äußere Normalenfeld ist).

Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x)\rangle\, dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} = \operatorname{div} F(x_0).$$

Hinweis: Schreiben Sie $\operatorname{div} F(x_0) = \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div} F(x_0)\, d\lambda_3(x)$.

LÖSUNG:

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS_{\partial K_r}(x) = \int_{K_r} \operatorname{div} F(x) \, d\lambda_3(x) \, .$$

Daher

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} - \operatorname{div} F(x_0) \right| \\
&\quad = \left| \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div} F(x) \; d\lambda_3(x) - \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div} F(x_0) \; d\lambda_3(x) \right| \\
&\quad = \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \left| \int_{K_r} (\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(x_0)) \; d\lambda_3(x) \right| \\
&\quad \le \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} |\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(x_0)| \; d\lambda_3(x) \\
&\quad \le \frac{1}{\lambda_3(K_r)} \int_{K_r} \sup\{ |\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x_0)| \colon y \in K_r \} \; d\lambda_3(x) \\
&\quad = \sup\{ |\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x_0)| \colon y \in K_r \} \, .
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\operatorname{div} F$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $|\operatorname{div} F(y) - \operatorname{div} F(x_0)| \le \varepsilon$ für alle $y \in K_\delta$. Für alle $0 < r \le \delta$ gilt nach vorigen Abschätzungen dann

$$\left| \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \; dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} - \operatorname{div} F(x_0) \right| \; \le \; \varepsilon \, .$$

Somit ist

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_{\partial K_r} \langle F(x), \nu(x) \rangle \; dS_{\partial K_r}(x)}{\lambda_3(K_r)} \; = \; \operatorname{div} F(x_0)$$

bewiesen.